

第七章

實函數之綜合除法概念

— 冪級數 (Power Series) 及其微積分、Taylor 定理

內容

7.1 本章宗旨

7.2 認識冪級數 — 收斂半徑、收斂區間及其代數運算

7.3 函數列、函數級數及一致收斂

7.4 冪級數之微積分

7.5 實函數之綜合除法 — 可解析函數 (Analytic Functions) 之表示法、Taylor 級數、Taylor 定理

7.6 相關題材 — 多項式之未定係數法延伸：冪級數

7.7 本章統合

7.8 練習題及解答

7.1 本章宗旨

本章專門討論冪級數

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k$$

是否成立的問題，當 $f^{(k)}(x)$ 均存在時 ($k = 1, 2, \dots$)，亦即 $f(x)$ 在 c 之鄰域 $(c-R, c+R)$ 上是否可表成其 Taylor 級數的問題。其中 R 為所予級數之收斂半徑，須為一正數。(即須有一區間讓其活動之意。)

當上等式成立時，它即可視為將實函數 $f(x)$ 展成以 $(x-c)$ 乘冪表示之綜合除法。這不就是實函數之多項式化嗎？惟因一般會是無窮多項 (屬冪級數之範疇) 之故，須涉及

收斂與否之問題. 也因此就有比較難以施展的情形存在.

7.2 認識冪級數

—冪級數之收斂性及其代數運算

冪級數 (Power Series)

當多項式的項數無窮多時, 便形成一種級數, 稱之為冪級數. 讀者可能知到多項式函數是實函數中最單純且處處平滑 (smooth everywhere) (曲線不會有折點或尖點之意) 的函數. 由它所延伸出來的冪級數是不是也具有這種性質—處處平滑? 由於表成無窮級數時涉及收斂的問題, 恐無法處處平滑. 另外, 須知的是, 冪級數都改以 x 之升冪式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 表示, 這跟多項式之有次方可言是不同的.

定義 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 之級數便稱為以 c 為中心的冪級數 (*a power series centered at c.*) 為簡便計, 常取 $c=0$ 進行討論, 當 $c \neq 0$ 時, 就以 $x-c$ 代回 x 即可.

實函數百百種, 難以一一列名 (記號太多, 會不勝其煩.) 冪級數可用來解決此難處, 以冪級數來表示各種函數 (只要在其係數上做改變即可), 雖然有諸多方便之處 (如各種運都可延用多項式), 惟引進冪級數後, 也有不便之處, 如須在其收斂之下進行 (意即, 並非對每一實數 x 都有定義).

從另一角度來說, 冪級數由 x 之乘冪組成, 一如多項式可由其係數所決定, 冪級數亦然. 冪級數之能否表示一函數是引進冪級數的主要用意. 它須視是否收斂而定. 因此, 其係數所對應的級數是否收斂決定冪級數之是否收斂. 意即, 若其係數近似等比級數 (即當 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = L$ (定數)) 時, 則整個冪級數就近似等比級數. 由此亦知, 前章所示之級數比值檢定法亦適用於冪級數之斂散性的決定. 詳見下示檢定法. 冪級數亦為函數級數的一種, 只是其各項中的函數為 x 之乘冪罷了. 乘冪函數可說是最簡單的實函數了.

例 1 如冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 表一等比級數, 只是公比 x 為一變數. 由無窮等比級數之求和公式知 (當 $|x| < 1$ 時) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ 表一有理 (分式) 函數, 後者的定義域為 $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}$. 但其冪級數表示 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 卻須 $\{x \in (-1, 1)\}$, 即 $|x| < 1$ 的限制, x 之活動範圍小很多.

註: 冪級數是以前項均由 $x-c$ 之乘冪 $(x-c)^n$ (a power in $(x-c)$) 組成, 而得其名.

例 2 如 $f(x) = \frac{1}{1+(x-4)}$ 表一有理(分式)函數,其定義域為 $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 3\}$ 但其冪級數表示 $\sum_{n=0}^{\infty} -1^n(x-4)^n$ (視為等比級數之和)卻須 $\{x \in (3, 5)\}$, 即 $|x-4| < 1$ 的限制,無法像 $f(x) = \frac{1}{x-3}$ 只須 $x \neq 3$ 即可,可見 x 之活動範圍小很多.

無理數可視為收斂冪級數的特例(其中 $x = 1/10$)之和

因無理數都可以表成無窮非循環小數,而每一小數也都可表成 10 的負乘冪表示,故在 0 與 1 之間的無理數可表成

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n},$$

其中 a_n 不外阿拉伯數字 0, 1, 2, \dots , 9 之一. 其實,級數 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n}$ 就是冪級數的一種(即 $x = 10^{-1}$ 之情況),由此看來,冪級數並非什麼新奇的級數.

冪級數表示法之唯一性

冪級數由其係數唯一表示. 此意即兩收斂冪級數 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 與 $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ 相等之充要條件是相同冪次的係數須相等. 由此知,就有如多項式雖有次數可言,實都由其係數所定;冪級數雖無次數可言,但仍完全由其係數確定之. 又因函數之冪級數表示雖可能由不同的方法求得,但由其冪級數之表示法的唯一性知所得結果必相同.

例 試求 $\frac{1}{1+x^3}$ 之冪級數表示,並求其定義域?

解 利用唯一性, $\frac{1}{1+x^3}$ 之冪級數表示可由直接利用長除法求得,或由直到代 $\frac{1}{1-x}$ 之已知冪級表示法 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ 而得 $\sum_{k=0}^{\infty} (-x^3)^k$. 亦即 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{3k}$ 此即為所欲求之冪級數表示. 至於其定義域亦可得知為 $\{x : |(-x)|^3 < 1\} = \{x : |x| < 1\}$.

冪級數之定義域的特性:

冪級數因由多項式延伸來的,或多或少仍保有一些多項式的特性,但因須受收斂的要求,故其活動範圍也受些限制.

定理 冪級數 $\sum a_n x^n$ 的定義域亦即其收斂集合不外下列三種區間之一:

- 單點 $x = 0$.
- 區間 $(-R, R)$, 有可能加上一個或兩個端點,視情況而定. 其中 $R > 0$.
- 整條實數軸

在 a), b) 及 c) 裡,對應的級數就分別稱為具有 0, R 與 ∞ 做收斂半徑之冪級數.

註1: 上定理的意思是說, 冪級數若收斂, 其中的 x 所滿足的範圍必為一區間, 不會是由零散的點所組成.

註2: 正數 R 之決定可利用級數的比值檢定法來進行. 至於是否包含端點, 就只能靠一般級數的收斂檢定法決定了.

例1 考慮冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

i) 當 $a_n = n!$ 之類型時 (即冪級數之係數以 n 的階乘而變, 且變得很劇烈) 所對應的冪級數的收斂半徑為 0;

ii) 當 $a_n = 1/n!$ 之類型時 (即冪級數之係數以 n 的階乘的倒數而變, 且很快趨近于 0) 所對應的冪級數的收斂半徑可為 ∞ (即 0 之倒數);

iii) 當 a_n 不是上述之類型時其所對應的冪級數的收斂區間為包含 0 之有界區間, 即收斂半徑為一正數 ($R > 0$).

例2 考慮正弦級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x$, 則其收斂範圍未必是區間型. (須 $|\sin x| < 1$, 而此不等式之解未必是區間.)

定理證明要訣: 須知區間的定義之什麼. 另外, 級數收斂的必要條件又是什麼. (末項須趨於 0.)

定理證明 i) 假設所予級數在 $x = x_1 \neq 0$ 處收斂, 則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_1^n = 0$. 故知從某一項 N 後, $|a_n x_1^n| < 1, \forall n \geq N$. 由此易知 $\forall x$ 具 $|x| < |x_1|$,

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n < \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

其中 $n \geq N$. 茲因 $\sum |x/x_1|^n$ 為一公比小於 1 之等比級數, 故得知級數 $\sum |a_n x^n|$ 收斂. 此即證明若一冪級數在 x_1 處收斂, 則它亦對所有 $|x| < |x_1|$ 絕對收斂.

ii) 仿上, 假設所予級數在 $x = x_2 \neq 0$ 處發散, 則它亦必對所有 $|x| > |x_2|$ 發散. 另外, 若所予級數在 x_1 處收斂且 $|x_1| > |x_2|$, 則由前證過, 知它亦須在 x_2 處收斂, 此顯然不合所設.

綜合以上, 便得證了除了定理所述三種可能性之收斂外, 別無他種可能.

收斂集合的求法

令 $\sum a_k x^k$ 為非零項冪級數. 若相鄰兩項係數之比的極限

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| |x| = L,$$

則下列敘述成立：

- (a) 只要 $|x| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R$ 即 $L < 1$, 所予冪級數絕對收斂 (absolutely converges),
 (b) 只要 $|x| > \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$, 即 $L > 1$ 或 L 不存在時, 所予冪級數發散,
 (c) 只要 $|x| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$, 即 $L = 1$, 所予冪級數無法判定收斂或發散, 即本檢定法失效.

其中的 $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ 就是所予冪級數之收斂半徑 (Radius of Convergence) (R 有可能為 ∞).

例 1 試求冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$ 之收斂集合 (convergent set.)

解 須知所予級數未必均正, 故利用比值檢定法時, 須取絕對值.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+2)2^{n+1}} \div \frac{x^n}{(n+1)2^n} \right| = \frac{|x|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = \frac{|x|}{2}.$$

可見所予級數絕對收斂當 $\rho = \frac{|x|}{2} < 1$ 時, 發散當 $\frac{|x|}{2} > 1$ 時. 故所求之收斂半徑為 2. 而欲求的收斂集合, 則須多考慮端點 (即 ± 2) 進去. 當 $x = \pm 2$ 時, 所予級數分別為 $\sum \frac{1}{n+1}$ 及 $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$, 由一般級數及交錯級數檢定法知前者發散; 後者收斂. 故 $[-2, 2)$ 為所求之收斂集合.

例 2 試求冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 之收斂集合 (convergent set.)

解 須知所予級數未必均正, 故利用比值檢定法時, 須取絕對值.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \div \frac{x^n}{n!} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

可見所予級數絕對收斂不管 x 之值如何. 故所欲求之收斂半徑為 ∞ . 而欲求的收斂集合就為整個 \mathbb{R} .

例 3 試求冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ 之收斂集合 (convergent set.)

解 須知所予級數未必均正, 故利用比值檢定法時, 須取絕對值.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} n+1 = 0 \text{ 當 } x = 0 \text{ 時}; = \infty \text{ 當 } x \neq 0 \text{ 時}.$$

可見欲求的收斂集合為集合 $\{0\}$.

收斂區間 (the interval of convergence)—視冪級數為一實函數時之定義域

可使冪級數 $\sum a_n x^n$ 收斂的所有實數會形成一區間, 不會零零散散. 此區間就稱為該冪級數的收斂區間, 區間之半長便稱為收斂半徑.

例1 冪級數 $\sum a_n x^n$ 之收斂半徑為 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$. 如 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ 之收斂半徑 $R = 1$.

例2 試求冪級數 $\sum \frac{n x^n}{10^n}$ 之收斂區間.

解 由上述性質知, 所予冪級數之收斂半徑為

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{10^n} \cdot \frac{10^{n+1}}{n+1} = 10$$

又因 $x = \pm 10$ 可使所予級數均發散, 故求得的收斂區間為 $(-10, 10)$.

註: 由此例知, 欲找收斂區間只須在所求得之收斂半徑所對應的區間上再考慮端點即可.

冪級數收斂特性

設冪級數 $S(x) = \sum a_n x^n$ 之收斂區間為 $(-R, R)$, 其中 $R > 0$. 則

i) $S(x)$ 必對各 $x \in (-R, R)$ 絕對收斂.

ii) $S(x)$ 必在 $(-R, R)$ 所包含之任何閉區間 $[a, b]$ 上一致收斂. (一致收斂之定義請見下頁.)

iii) 若 R 為有限, 則 $S(x)$ 必對各 $x \notin (-R, R)$ 發散.

證 略

冪級數之代數運算

冪級數之代數運算約略可比照多項式之代數運算來進行.

設 $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ 為兩收斂冪級數, 則它們之間的相等、相加、相減、相乘、相除的方法都類似多項式的方法, 至於合成, 則相當於代入法, 如下示:

$$\sum a_n x^n = \sum b_n x^n \triangleq a_n = b_n, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\sum a_n x^n + \sum b_n x^n \triangleq \sum (a_n + b_n) x^n.$$

$$\sum a_n x^n - \sum b_n x^n \triangleq \sum (a_n - b_n) x^n.$$

$$\sum a_n x^n \cdot \sum b_n x^n \triangleq \sum (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) x^n.$$

$$\sum a_n x^n \div \sum b_n x^n \triangleq \text{視同升冪式多項式之直接相除}$$

$$\sum_n x^n \circ \sum b_n x^n \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \right)^n$$

例 1 設冪級數 $f(x) = \sum a_n x^n$ 對所有 $x \in (-R, R)$ 都具 $f(-x) = f(x)$ (即 $f(x)$ 為偶函數). 試證 $a_n = 0$ 當 n 為奇數時.

解 由假設得 $\sum a_n (-x)^n = \sum a_n x^n$, 移項後整理得 $\sum 2a_{2n+1} x^{2n+1} = 0, \forall x \in (-R, R)$. 在由冪級數之相等定義知 $a_{2n+1} = 0, \forall x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. 得證.

例 2 試證 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) x^n$, 並利用此結論求表示下列級數之函數.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (0 + 1 + \cdots + n) x^n,$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} (0 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}) x^n.$

解 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^n}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_n) x^n$, 最後等式用到冪級數之乘法定義.

a) 由上知, $a_0 = 0, a_1 = 1, \cdots, a_n = n$, 故得所予級數可表成 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^n}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

b) 由上知, $a_0 = 0, a_1 = 1, \cdots, a_n = (-1)^n \frac{1}{2^{n-1}}$, 故得所予級數可表成

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (x^n / 2^{n-1})}{1-x} = \frac{2x}{(1-x)(2x+1)}.$$

7.3 函數列、函數級數、一致收斂

實數列與實級數已於前幾章中節談過. 此處的函數列及函數級數就是它們的延伸. 讀者應曉得, 一談及函數就會觸及集團的概念. 有了這種概念後, 來認識函數列及函數級數應會比較容易些. 當數列中的諸項從實數換成實函數時, 所對應的數列便成函數列; 一樣的, 若實級數中的諸項換成實函數時, 所對應的級數便是函數級數. 在數學裡, 有興趣的是它們在何時會收斂? 首先要知道它們收斂的定義.

Definition

Let E be a subset of \mathbb{R} . A sequence of functions $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ is said to *converge pointwise* on E if $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ exists for each $x \in E$.

Let E be a subset of \mathbb{R} . A sequence of functions $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ is said to *converge uniformly* on E if $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \forall x \in E$.

意即, 設 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一函數列. 若對任予 $x \in I$ (區間) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = l$ (定值), 則稱所予函數列 *逐點收斂* (*Pointwise Convergent*); 其中 l 會隨所予 x 而變, 爲 x 的函數當以 $f(x)$ 表示時, 稱之爲所予函數列之極限 (函數).

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ 對 $\forall x \in I$ (區間), 則稱所予函數列 *一致收斂* (*Uniformly Convergent*) 於 $f(x)$; 其中 $f(x)$ 爲一適當實函數.

針對以上之定義, 有下列補充.

i) 逐點收斂實即實數列的一種, 只是其中的 x 不隨 n 而變罷了; 至於一致收斂則考慮到連與 n 有關之 x 的收斂情況, 比較複雜些. 其間的差別可用數學上的敘述看出:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) : \text{逐點收斂} \\ \equiv (\forall x \in I \text{ and } \forall \varepsilon > 0) \exists N(x, \varepsilon) > 0 \text{ such that } \forall n > N(x, \varepsilon), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) : \text{一致收斂} \\ \equiv (\forall \varepsilon > 0) \exists N(\varepsilon) > 0 \text{ such that } \forall n > N(\varepsilon) \text{ and } \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

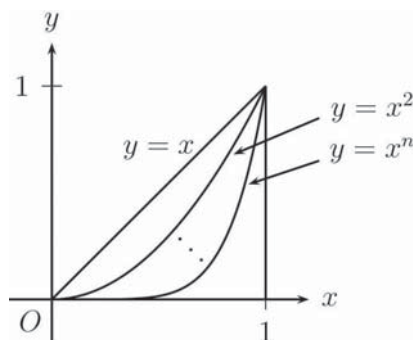
由上可得知, 主要差別在於所存在的 N 是否與 x 有關.

ii) '不一致收斂' 時怎麼應對: 可找到與 n 有關之適當的 x 使當 n 足夠大時, $|f(x) - f_n(x)| \not< \varepsilon$. 請參考下示諸例. 另外, 由下示之保連性、保可積性及保可導性若不成立時, 亦可得知所予函數列不滿足一致收斂.

iii) 當兩個變數在一起時, 如上示情況, 照理應都在變, 但在數學上的處理方式是先讓其中一個變另一個暫時不變, 當此情況處理完後再換另一個變. 爲何要這樣處理, 主要是因兩個同時變時, 情況比較複雜, 致而難以掌握.

iv) 由定義不難知, 實函數列若一致收斂, 則必逐點收斂.

例 1 令 $f_n(x) = x^n$, 問函數列 $\{f_n(x)\}$ 對實數 x 會一致收斂嗎? 若不會, 試討論能使它一致收斂的 x 之範圍.



解 顯然的, 當 $|x| > 1$ 時, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \rightarrow \pm\infty$, 不會收斂, 當然更不會一致收斂. 但當 $|x| \leq 1$ 時, x^n 則會收斂, 惟未必一致收斂, 蓋若一致收斂, 則對任予 $0 < \varepsilon < 1/3$ 必有 $N > 0$ 存在使 $|x^N| < \varepsilon$, 但當取 $x = (1 - 1/N)$ 時, 亦即 x 與 N 有關時, 雖 $x < 1$ 但 $x^N = (1 - 1/N)^N$ 會很接近 $e^{-1} > \varepsilon$ (當 N 足夠大時) 可見導致矛盾. 此即表當 $|x| < 1$ 時, x^n 無法一致收斂之意. 由此知, 欲使 x^n 一致收斂須把前此狀況排除, 故知 $(-b, b)$ 為所求之 x 範圍可使函數列 $\{x^n\}$ 一致收斂者, 其中 b 為小於 1 之任予正定數.

註: 綜合以上, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{當 } |x| < b \text{ 時} \\ 1 & \text{當 } x = 1 \text{ 時} \\ e^{-1} & \text{當 } x = 1 - 1/n \text{ 時} \\ \pm\infty & \text{當 } |x| > 1 \text{ 時} \\ \text{不定} & \text{當 } x = -1 \text{ 時} \end{cases}$$

由下示定理 1 (p.220) 亦知 (參見上 \in 附圖) 所予函數列不一致收斂.

例 2 試證函數列 x^n/n 在 $[-1, 1]$ 上一致收斂.

證 因 $|x^n/n| \leq 1/n < \varepsilon$, 欲使 x^n/n 在 $[-1, 1]$ 上一致收斂至零, n 的選取不受 x 之取法而變. 可見所予函數列在所予區間上為一致收斂.

註: 逐點收斂與一致收斂的最大差別在於所找到的 N 是否跟 x 有關. 這也是數列與函數列之間的最大差別所在. 須知當函數列中的變數 x 給定時, 那函數列跟實數列就沒什麼兩樣. 問題就在 x 會變, 所以要套用數列的各種性質時, x 須一致行動才可以辦到. 這就是 '一致' 收斂之用意所在. 另外, 在函數列裡, 因含有兩個變數 n 與 x , 而這兩個變數既非獨立亦非相依, 意即它們是非常自由的變數, 要怎麼變都不受限制. 複雜之處就在於 x 有可能隨 n 在變, 如例 1 中所取的 $x = 1 - 1/n$ 即是一例.

函數級數之收斂

形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$ 便表函數級數, 其是否收斂可比照實級數之收斂定義之. 惟亦分逐點收斂與一致收斂.

例 1 當 $1 \geq x \geq 0$ 時, 試求函數級數 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在何時會收斂? 會收斂時並求其和.

解 由定義知, 即求函數列 $s_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ (所予級數之首 n 項之和) 之極限.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} & \text{當 } 0 < x < 1 \text{ 時} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty & \text{當 } x = 1 \text{ 時} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-(1-1/n)^{n+1}}{1-(1-1/n)} = \infty & \text{當 } x = 1 - 1/n \text{ 之類型時} \end{cases}$$

可見所予級數當 $0 < x < 1$ 時, 逐點收斂至 $\frac{1}{1-x}$ 此即為其和; 但不一致收斂. 欲一致收斂時, 必須把上述第三情況踢除, 此亦即 x 須滿足 $0 < x < b$, 其中 b 為小於 1 之任何正實數. (與 x 無關.)

例 2 當 $1 \geq x \geq 0$ 時, 試問函數級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 在何時會一致收斂? 會收斂時並求其和.

解 由定義知, 即相當於求函數列 $s_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k}$ (所予級數之首 n 項之和) 之極限. 令 $t_n = \sum_{k=0}^n x^k$, 則顯然, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x t_n(u) du = \int_0^x \frac{1}{1-u} du = -\ln(1-x)$. 可見

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \begin{cases} -\ln(1-x) & \text{當 } 0 < x < 1 \text{ 時} \\ 0 & \text{當 } x = 0 \text{ 時} \\ \infty & \text{當 } x = 1 \text{ 時} \\ \infty & \text{當 } x = 1 - 1/n \text{ 之類型時} \end{cases}$$

可見所予級數當 $0 \leq x < 1$ 時, 逐點收斂至 $\int_0^x \frac{1}{1-u} du = -\ln(1-x)$; 但不一致收斂. 欲一致收斂時, 必須把上述第四情況踢除, 此亦即 x 須滿足 $0 < x < b$, 其中 b 為小於 1 之任何正實數.

註: 注意, 上述解之過程中用到後面才講的保可積分性.

例 3 冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是本節所談的函數級數中最簡單之例.

須知函數列之極限若逐點存在則諸極限亦定義一函數, 即所謂的該函數列的極限函數. 同樣的, 我們對這個新函數想知道它具有連續性嗎? (當函數列之各項連續時) 請參考下面諸例所示:

例 4 令函數 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$, 試求 $f(x)$ 的定義域. 並問 $f(x)$ 是連續函數嗎?

解 當 $x \neq 0$ 時, 則因 $1-x^2 < 1+x^2$, 所以 $\frac{1-x^2}{1+x^2} < 1, \forall x \neq 0$. 可見 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1-x^2}{1+x^2})^n) = 0$. 故當 $x \neq 0$ 時得 $f(x) = 0$. 其次, 當 $x = 0$ 時, 則因 $f(x) = 1^n = 1$, 可見 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處不連續. (雖 $f_n(x) = (\frac{1-x^2}{1+x^2})^n, \forall n \in \mathbb{N}$ 為連續函數.)

函數級數之一致收斂檢定法 — M-Test

設函數級數 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 之各項在某區間 I 上有定義. 另設 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 為收斂的常數級數. 若 $|f_k(x)| \leq M_k, \forall k \in \mathbb{N}$ and $x \in I$, 則級數 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 I 上一致收斂.

證明 令 $s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$. 則

$$|s_n(x)| \leq \sum_{k=1}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=1}^n M_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} M_k.$$

其中最末不等式成立是因常數級數 $\{\sum_{k=1}^{\infty} M_k\}$ 收斂之故. 可見 $s_n(x)$ 絕對收斂, 且一致收斂. (因其收斂不受 x 之影響.)

註: 為何稱為 M -Test? 因用到實級數 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ 之收斂, 為往後引用一致收斂檢定法之方便而稱呼之.

例 函數級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ 是否對所有實數 x 一致收斂?

解 令 $f_k(x) = \frac{\sin kx}{k^2}$, 則 $|f_k(x)| \leq \frac{1}{k^2}$. 當令 $M_k = \frac{1}{k^2}$ 時, 由上 M -Test 得所予級數一致收斂. (因實級數 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收斂)

函數列、函數級數之極限是否保有連續、可積分或可導的問題 — 雙重極限的問題

由於幕級數可以用來表示一些實函數, 所以有關它的求導及積分就是微積分的重要課題. 幕級數的求導與積分牽涉到無窮多項的取導與積分. 須知前此所示之取導與積分的和律 (只限有限多項才可使用) 在此無法派上用場. 面對此限制如何予以踢除乃有本欄的引進. 本欄的內容屬高微部分, 讀者若有感於其內容較難掌握時, 儘可留到下次有機會再學習, 不用急於一時, 但只要多費神思考些, 還是可以掌握的.

首先有幾則問題提出來有待釐清:

假定實函數 $f(x)$ 完全由下之函數式所定義

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad a \leq x \leq b,$$

其中 $\{f_n(x)\}$ 為所予實函數列, 在此請問:

- A) 欲確知極限函數 f 是否在區間 $[a, b]$ 上連續時, 諸 f_n 須具有何條件?
 B) 欲確知極限函數 f 是否在區間 $[a, b]$ 上可積分時, 諸 f_n 須具有何條件?
 C) 欲確知極限函數 f 是否在區間 $[a, b]$ 上可微分時, 諸 f_n 須具有何條件?
 D) 在何條件下, 下等式成立?(即先求極限再取積分是否等於先取積分再求極限?)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

- E) 在何條件下, 下等式成立?(即先求極限再取導數是否等於先取導數再求極限?)

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

以上就是由實函數所組成之實函數列的收斂問題以及其極限函數是否仍保有原函數列各項的性質, 如連續性、可積分性、可微分性等. 上列諸問題相當於問函數列的收斂與實函數之取極限、取導、取定積分(視成運算時)之間是否可交換的問題. 須知在微積分學裡, 注重的是實函數的極限以及它所衍生的微分、積分方面之諸問題. 即下列等式是否成立?

$$\lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x)?$$

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)?$$

$$\frac{d}{dx} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dx} f_n(x)?$$

針對上述問題, 請先參看下列幾則例題,

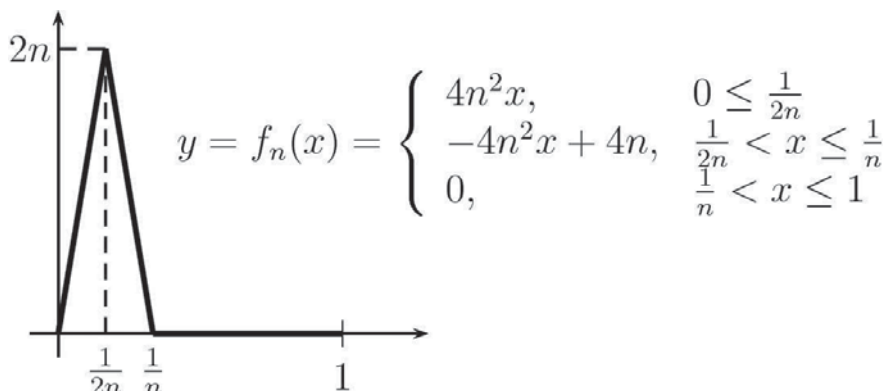
例 1 考慮 $f_n(x) = x^n$, 並令 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, $0 \leq x \leq 1$. 所予函數列顯然收斂, 當 $0 \leq x < 1$ 時. 可見 $f(x)$ 可化簡成

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{當 } 0 \leq x < 1 \text{ 時} \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

由此例知, 函數列 $f_n(x)$ 雖在 $[0, 1]$ 上收斂且連續, 但其極限函數卻不連續.(參照 p.215 之附圖.)

例2 考慮函數列,

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & \text{當 } 0 \leq x \leq 1/(2n) \text{ 時} \\ -4n^2x + 4n & \text{當 } 1/(2n) \leq x \leq 1/n \text{ 時} \\ 0 & \text{當 } 1/n \leq x \leq 1 \text{ 時} \end{cases}$$



由此不難知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, 當 $0 \leq x \leq 1$ 時. 可見 $\int_0^1 f(x) dx = 0$. 但所予函數列之定積分 $\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \forall n$ (此積分相當於底 $1/n$ 高 $2n$ 之三角形面積). 故

$$\int_0^1 f(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

可見雖 $f_n(x)$ 與 $f(x)$ 均在所予區間上連續, 但它們的定積分卻不相等.

例3 考慮 $f_n(x) = x^n/n$, 則在區間 $[0, 1]$ 上, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, 0 \leq x \leq 1$. ($\because 0 \leq f(x) \leq 1/n$.) 所予函數列顯然收斂, 當 $0 \leq x \leq 1$ 時. $f_n(x)$ 顯然均可微分. 但 $f'_n(x) = x^{n-1}$, 此函數列由例1(p.214)知其極限函數為

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{當 } 0 \leq x < 1 \text{ 時} \\ 1 & \text{當 } x = 1 \text{ 時} \end{cases}$$

可見 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) \neq f'(1)$.

由此例知, 函數列 $f_n(x)$ 雖在 $[0, 1]$ 上收斂且可微分, 但其極限函數導數卻未必會等於該函數列各項取導數後的極限.

其中的關鍵在於須用及所謂的一致收斂 (uniformly convergent) 概念, 其定義已如前述.

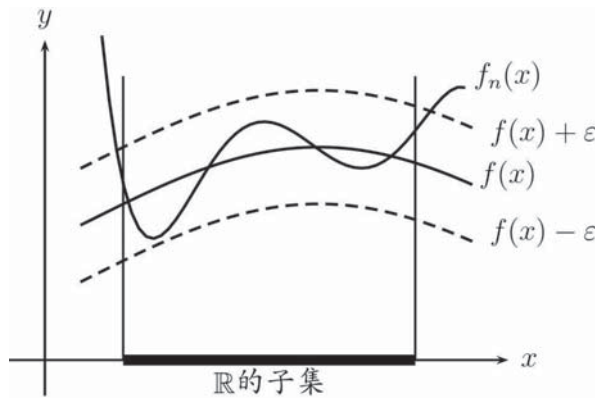
定理 1(保連續性) 令實函數列 $\{f_n(x)\}$ 在區間 $[a, b]$ 上定義, 並假設它們在該區間上一致收斂至 $f(x)$. 那麼, 若各函數 $f_n(x)$ 在 $x_0 \in [a, b]$ 連續, 則它們的極限函數 $f(x)$ 亦在 x_0 連續. 更特別的, 若各 f_n 在整個區間上連續時, 則 f 亦然.

證明剖析:(反推法) 欲證 f 在 x_0 連續, 由定義知須證 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 亦即 $|f(x) - f(x_0)| < \text{任予正數}$, 只要 $|x - x_0|$ 也小於任予正數. 如何透過所予假設來顯示 $|f(x) - f(x_0)|$ 可任意小便是關鍵.

定理證明

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon \end{aligned}$$

只要 $|x - x_0| < \delta$, 其中 $\delta > 0$ 可由各函數之連續性以及一致收斂性得知. 另外, 因 x_0 可為 $[a, b]$ 上之任予點, 故得證 $f(x)$ 亦在 $[a, b]$ 上連續.



級數之保連續性 呈連續的函數級數若一致收斂時, 其極限函數(即其和)必連續. 此亦即

$$\lim_{x \rightarrow c} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow c} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(c).$$

證 同定理 1 之證明, 只須將 f_n 以部分和 $s_n(x) \triangleq \sum_{k=1}^n f_k(x)$ 取代即可. 亦即

$$\lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(c).$$

此即為欲證式。

定理 2(保可積分性) 令實函數列 $\{f_n(x)\}$ 在閉區間 $[a, b]$ 上定義, 並假設它們在該區間上一致收斂至 $f(x)$. 那麼, 若各函數 $f_n(x)$ 在 $x_0 \in [a, b]$ 連續, 則

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

證明剖析:(反推法) 欲證

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

由定義知須證 $|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| < \varepsilon$ (其中 ε 為任予正數) 亦即能證 $|f(x) - f_n(x)|dx < \varepsilon$ 即可. 如何透過所予假設來顯示 $|f(x) - f_n(x)|$ 可任意小便是關鍵. 這就需要用到一致收斂之假設.

定理證明 由一致收斂性知 $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, 對所有 $x \in [a, b]$ 均成立只要 n 足夠大. 因此

$$|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx < (b-a)\varepsilon.$$

得證.

定理 3(保可導性) 令實函數列 $\{f_n(x)\}$ 在區間 $[a, b]$ 上定義, 並設它們在該區間上具連續可導函數. 若函數列 $\{f'_n\}$ 在該區間上一致收斂, 且函數列 $\{f_n\}$ 本身收斂, 並以 $f(x)$ 為極限函數, 則 f 為可微分, 且

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

證明剖析:(反推法) 欲證 f 在 x_0 可微分, 由定義知須證 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 存在. 茲因

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(\xi)$$

(其中最後等式用到平均值定理) 然後透過一致收斂的假設由定理 1 得證 $f'(x_0)$ 存在.

$$\begin{array}{ccc} f_n & \longrightarrow & f \\ \downarrow & & \downarrow \\ f'_n & \longrightarrow & f' \end{array}$$

另此定理排在保可積性之後，是有其因的。其意是要證明此定理時恐須用及它。

定理證明 設 x_0 在 $[a, b]$ 上給定。

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(\xi) \text{ (此處用及平均值定理, 其中 } \xi \text{ 介於 } x \text{ 與 } x_0 \text{ 之間)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f'_n(\xi) \text{ (此處用及保連性)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_0) \end{aligned}$$

定理另證 設 $\{f'_n\}$ 收斂至 $g(x)$ 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = g, \quad \forall x \in [a, b]$ 且 $x_0 \in [a, b]$. 由微積分基本定理知

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^x f'_n(t) dt,$$

對 n 取極限後得

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

其中等號右側之結果利用到為定理 2 之結果。於此再利用微積分基本定理即兩邊對 x 取導得

$$f'(x) = g(x), \forall x \in [a, b].$$

此亦即

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \forall x \in [a, b].$$

證畢。

例 1 令函數列 $f_n(x) = \frac{1}{x^n + x^{-n}}$, 其中 $x > 0$. 又令 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. 試求 $f(x)$, 並問 $f(x)$ 在 $x > 0$ 時連續嗎?

解 當 $x > 1$ 時, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \infty$ 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{-n} = 0$, 可見 $f(x) = 0$; 當 $0 < x < 1$ 時, 因 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{-n} = \infty$, 可見亦 $f(x) = 0$. 惟當 $x = 1$ 時, $f(x) = 1/2$, 可見 $f(x)$ 在 $x > 0$ 上不連續.

註: 由保連性知所予函數列對 $x = 1$ 附近不一致收斂 (如考慮 $x = (1 \pm 1/n)$).

例 2 若 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, 其中 $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^4}$, 試求

$$\int_0^1 f(x) dx \text{ 與 } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

解

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

可見 $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [\tan^{-1} nx^2]_0^1 = \pi/2$.

註: 由於 $\int_0^1 f(x) dx \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$, 可得知函數列 $\{f_n(x)\}$ 不一致收斂. 事實上, 當 x 很接近 0 時, 如 $x = 1/n$ 時 (n 足夠大), $f_n(1/n) \rightarrow 2 \neq 0$.

例 3 若 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, 其中 $f_n(x) = \frac{2}{\pi} x \tan^{-1} nx$, 試求 $f(x)$, 並證明 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x)$ 對各 $x \in \mathbb{R}$ (包括 0) 均可導. 但 $f'(0) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0)$.

解

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

另外, $f'_n(x) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} nx + \frac{2}{\pi} \frac{xn}{1+n^2x^2}$. 可見所予函數列對任予實數均可導. 但須知 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 處不可導. (意指 $f'_n(x)$ 在 \mathbb{R} 上不一致收斂, 此可由上例得知.)

7.4 冪級數之微積分

冪級數的微分、積分及應用

冪級數在其收斂區間上為一實函數, 故可考慮其對應的微積分.

1° 冪級數之連續性

設冪級數 $S(x) = \sum a_n x^n$ 之收斂區間為 $(-R, R)$, 其中 $R > 0$ 且 $c \in (-R, R)$.

$$\lim_{x \rightarrow c} \sum a_n x^n = \sum a_n (\lim_{x \rightarrow c} x^n) = \sum a_n c^n.$$

意即, 冪級數在其定義域中連續.

註1: 上性質亦表下等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow c} \sum_{k=0}^n a_k x^k = \lim_{x \rightarrow c} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k x^k$$

成立.

註2: 由於冪級數可視為實函數的一種, 除了上述性質外, 在微積分裡, 便是它的微分及積分了. 在此只能告知它們都跟多項式的微分積分沒兩樣. 詳細內容請參見下兩欄.

例 試求冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n (x-3)^n$ 在 $x=2$ 的極限.

解 所予級數之收斂區間為 $(-1, 5]$. 依據上列性質, 知

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n (x-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{2})^n (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

(因2在其收斂區間中.)

2° 冪級數的微分法

冪級數當收斂時既然可視為一實函數, 是以自然想知道它是否可微分? 若可, 則其導數為何? 在解微方時, 因為能提供其解的所知函數不多, 所以常以冪級數來取代. 可見冪級數的導數有其重要性.

定理—逐項微分法 (Term by Term Differentiation)

If

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

converges for $|x-a| < R$, then the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + n c_n (x-a)^{n-1} + \cdots,$$

obtained by differentiating the series for f term by term, converged for $|x - a| < R$ and represents $f'(x)$ on that interval. If the series for $f(x)$ converges for all x , then so does the series for f' .

意即, 意即, 若

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

在區間 $|x - a| < R$ 上收斂, 則級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n(x-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + n c_n(x-a)^{n-1} + \cdots,$$

得自對 f 之級數逐項微分者, 必在 $|x - a| < R$ 上收斂, 且在該區間上代表函數 $f'(x)$. 若表 $f(x)$ 的級數對所有的 x 收斂, 則對新函數 $f'(x)$ 之級數亦然. (意即表示取導後之冪級數不因取導而改變原先之收斂半徑.)

證明 由導數之定義進行, 中間利用冪級數之減法, 將每一項化成導數型, 再利用一致收斂性取各項極限即可得所欲結論. 如下示.

$$\begin{aligned} \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{dx} \Big|_{x=c} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(x^n - c^n)}{x - c} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow c} a_n \frac{x^n - c^n}{x - c} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n c^{n-1}. \end{aligned}$$

其中第三個等號處須用到一致收斂.

3° 冪級數積分法

定理一 逐項積分法 (Term-by-term Integration)

If

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

converges for $|x - a| < R$, then the series

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = c_0 + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

obtained by integrating the series for f term by term, converged for $|x - a| < R$ and represents $\int_a^x f(t)dt$ on that interval. If the series for $f(x)$ converges for all x , then so does the series for $\int_a^x f(t)dt$.

意即, 若

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

在區間 $|x - a| < R$ 上收斂, 則級數

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = c_0 + c_1 \frac{(x-a)^2}{2} + c_2 \frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + \cdots,$$

得自對 f 之級數逐項積分者, 必在 $|x - a| < R$ 上收斂, 且在該區間上代表函數 $\int_a^x f(t)dt$. 若表 $f(x)$ 的級數對所有的 x 收斂, 則對新函數 $\int_a^x f(t)dt$ 之級數亦然. (意即表示積分後之冪級數不因取積分而改變原先之收斂半徑.)

證明

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

其中第一等號須用到一致收斂性.

例 1 試求 $\ln(1+x)$ 在 0 處之 Taylor 級數表示.

解 $\because \ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots dt = \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k}$, 其中 $|x| \leq 1$
 註: 直接求 $\ln(1+x)$ 之各階導數值, 在代入 Taylor 級數亦可得同一答案.

例 2 利用冪級數之積分法, 求函數 $f(x) = \tan^{-1} x$ 之冪級數表示.

解 $\because \tan^{-1} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$,
 其中 $|x| \leq 1$.

註：直接求 $\tan^{-1} x$ 之各階導數值，在代入 Taylor 級數亦可得同一答案，惟各階導數無通式可延用。

例 3 利用冪級數之微分法，求函數 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ 之冪級數表示。

解 $\because \frac{1}{(1-x)^2} = D_x(1-x)^{-1} = D_x(\sum_{k=0}^{\infty} x^k) = \sum_{k=1}^{\infty} (kx^{k-1})$ ，其中 $|x| < 1$

註：直接求 $(1-x)^{-2}$ 之各階導數值，再代入 Taylor 級數亦可得同一答案。

7.5 實函數之綜合除法

—可解析函數之表示法、Taylor 定理、Taylor 級數

當一實函數 $f(x)$ 可用冪級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ 表示時只要級數之收斂半徑 $R > 0$ ，便稱該函數 $f(x)$ 為可解析函數，並以區間 $(c-R, c+R)$ 為定義域，其中 c 為適當之實數。實函數 e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ 等都是可解析函數之例。

Taylor 級數、Maclaurin 級數

Taylor 級數是冪級數之一，其係數均由某實函數之各階導數值所決定。一函數所對應之 Taylor 級數既由其各階導數值決定，那是不是表該級數與該函數有密切關連？下示級數就稱為在 a 由函數 f 所衍生的 Taylor 級數（當 f 之各階導數在 a 處均存在時）：

$$\begin{aligned} & f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \end{aligned}$$

註：當 $a = 0$ 時所衍生的 Taylor 級數又稱為 Maclaurin 級數。

例 指數函數 $f(x) = e^x$ 在 $x = 0$ 處的 Taylor 級數為 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 。其中 $f^{(n)}(0) = e^x|_{x=0} = 1, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ，而 x 可為任予實數。（因該級數之收斂半徑是無限大。）

註 1：讀者還記得在高中學過所謂的多項式的綜合除法吧。本書第五章裡介紹過 Taylor 公式 (p.137)，知道它是導數平均值定理的縱向延伸。同樣在那裡，把導數平均值定理解讀成實函數的除法定理或因式定理 (p.136)。乘此，Taylor 公式不就可解讀成實函數之綜合除法了——視為多項式綜合除法的延伸。實函數 $f(x)$ 之 Taylor 級數表示也就可視為 $f(x)$ 多項式化的極限表示了（因其中不含誤差項）。

註2: 問由 Taylor 級數所表示之函數恆可導嗎?(Yes.)

Taylor's Theorem

Taylor 定理之所以夠得上是一定理, 就是告知讀者一函數會等於它所衍生的 Taylor 級數的條件. Taylor 定理是上述導數平均值定理的縱向延伸—從一階導數延伸至高階導數. 亦如前所述, 可視為過去所學的綜合除法的延伸—從多項式函數延伸至一般實函數上. 其敘述如下:

Taylor Theorem

Let f be a function with derivatives of all orders in some $(a-r, a+r)$. The Taylor series

$$\begin{aligned} f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

represents the function f on the interval $(a-r, a+r)$ if and only if the error term

$$E(x) \triangleq \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

tends to 0 as n approaches ∞ : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$.

意即, 令 f 為在某區間 $(a-r, a+r)$ 中具所有階數的導數 (其中 r 為所予冪級數之收斂半徑), 則 Taylor 級數

$$f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + f'''(a)(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

可代表函數 f 本身的充要條件為誤差項 $E(x) \triangleq \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$ 會趨近於 0, 當 $n \rightarrow \infty$ 時.

在證定理成立之前, 先看看例子.

例 1 當 $f(x)$ 為一多項式函數時, 其所對應在 $x=0$ 處之 Taylor 級數則為其本身 (仍為有限項.) 至於在 $x=c \neq 0$ 處之 Taylor 級數則亦可由高中所學之綜合除法求得. (續見下面例 1p.232)

例2 如 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 為一分式函數, 定義域為 $\{x \neq 1\}$. 而其在 $x = 0$ 處所對應的 Taylor 級數為 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 則須 $|x| < 1$, 蓋其誤差項的極限才會趨近於 0 (由等比級數之性質). 所以由 Taylor 定理知該 Taylor 級數可表示函數 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 只有當 $|x| < 1$ 時.

例3 如 $f(x) = e^x$ 為一超越函數, 定義域為 \mathbb{R} . 而其在 $x = 0$ 處所對應的 Taylor 級數為 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 則對 $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, 蓋其誤差項的極限才會趨近於 0 (利用級數之比值檢定法). 所以所予 Taylor 級數可表示所予函數 $f(x) = e^x$ 當 $x \in \mathbb{R}$ 時.

例4 二項式定理的推廣: 讀者在高中學過二項式定理:

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + x^n,$$

其中 n 為正整數. 在此可透過 Taylor 公式推廣其中的 n 為任予實數 α , 即

$$(1+x)^\alpha = 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots, \quad \forall |x| < 1.$$

其中 $\binom{\alpha}{k} \triangleq \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. 上式右側即為一般所謂的 **二項級數 (Binomial Series)**.

證 從略, 因欲證其誤差項趨近于零較繁複.

例5 並非任何實函數都有它的 Taylor 級數表示, 如

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{當 } x \neq 0 \text{ 時} \\ 0 & \text{當 } x = 0 \text{ 時} \end{cases}$$

在 0 處就沒有.

解 因 $f^{(k)}(0) = 0, k = 0, 1, 2, \dots$ (詳見第五章習題 20, p.149) 可見不合. (因誤差項不趨近于 0.)

Taylor 定理證明 由 $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, 易知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

可解析函數的 Taylor 級數表示法

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 \leq x < 1.$$

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad |x| \leq 1.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(k-1))}{k!}x^k + \cdots, \quad |x| < 1.$$

其中 α 為任予非整數之實數, 且與 x 無關.

應用例—尤拉 (Euler) 公式:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \text{ 其中 } i \text{ 表虛數 } \sqrt{-1}.$$

證 由 e^{ix} , $\cos x$, $\sin x$ 之 Taylor 級數表示分別代入即可得證.

棣莫哇 (De Moivre) 定理:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx, \text{ 其中 } n \in \mathbb{N}.$$

證 由尤拉公式及 $e^{nx} = (e^x)^n$ 即得.

註1: 另外, 由正弦餘弦函數的 Taylor 級數表示可驗證為何它們分別為奇函數及偶函數 (因級數之各項均分呈 x 之奇、偶次方.)

註2: 引進 Taylor 級數之用意何在? 在計算超越函數值上可使誤差小些且省時不少. (請見下示諸例.)

例1 試求 $f(x) = 2x^3 - 5x + 4$ 之近似值 $f(3.02)$.

解 欲求 $f(x)$ 在 $x = 3.02$ 之近似值, 若直接代入計算時, 既費時又無法控制誤差. 數學上的處理常針對此而提出對策. 先將 $f(x)$ 改為 $(x - 3)$ 為乘冪之多項式表示 (利用綜合除法): $f(x) = 2(x - 3)^3 + 18(x - 3)^2 + 49(x - 3) + 43$, 此時再以 $x = 3.02$ 代入得 $f(3.02) = 2(0.02)^3 + 18(0.02)^2 + 49(0.02) + 43 = 43.987216$.

例 2 試求 $f(x) = \sin 31^\circ$ 之近似值至小數點第四位.

解 欲求 $f(x)$ 在 $x = 31^\circ$ 之近似值, 首先須把 x 換成弧度量 $\pi/6 + \pi/180$. 再代入 \sin 在 $x = \pi/6$ 之 Taylor 級數計算, 方不費時又易於控制誤差. 已知

$$\sin x = \sin \pi/6 + (x - \pi/6) - (x - \pi/6)^3/3! + (x - \pi/6)^5/5! + \dots$$

按此當 $x = \pi/6 + \pi/180$ 時, 得

$$\sin(\pi/6 + \pi/180) = \sin \pi/6 + (\pi/180) - (\pi/180)^3/3! + (\pi/180)^5/5! + \dots \approx 0.51745.$$

精確至小數第四位則為 0.5175.

例 3 試求 $\tan x$ 之冪級數表示.

解 由 $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, 在以 $\sin x, \cos x$ 之已知冪級數直接相除而得. 即

$$\tan x = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \dots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \dots} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

註: 除了上示直接相除法外, 當然也可以由取 $\tan x$ 之各階導數值來找到 $\tan x$ 之冪級數表示, 惟未必比較簡單.

例 4 試求 $\ln(\frac{1+x}{1-x})$ 之冪級數表示.

解 已知 $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$. 故

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x^{2n-1}}{(2n-1)}$$

註: 上示冪級數之收斂半徑雖仍為 1, 但欲求之對數值則不限 x 之範圍, 蓋 $\frac{1+x}{1-x}$ 可表任予正實數, 當 $|x| < 1$ 時.

有了函數的 Taylor 級數表示法回頭查證實函數的性質

由 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \forall x \in \mathbb{R}$ 可驗證正弦函數是奇函數(都由 x 之奇乘幂組成), 並含有'因式' x , 這跟前所述(p.141)得到印證. 在由 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \forall x \in \mathbb{R}$ 可得知餘弦函數是偶函數.

用幂級數表示實函數為何施展不開?

用幂級數表示實函數有其優點也有缺點. 優點請見底下之應用部分. 至於缺點則不少, 如實函數若具有週期性時, 就很難利用幂級數表示來驗證. 譬如 $\sin(x+2\pi) = \sin x$ 來說, 就很難從 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+2\pi)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 證到 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. 其他如想利用勘根定理勘幂級數之根, 同上情況亦不是簡單之舉. 例如, 欲查驗 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 0$ 有根 $x = \pi/2$. (即 $\cos x = 0$ 之一解.) 讀者不妨一試. (另請參考習題第5題 p.235.)

7.6 相關題材

多項式之未定係數法延伸——可解析函數之表示法

讀者在高中學過多項式之未定係數法. 在此把它推廣到無窮多項即成幂級數, 茲以 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k$ 表之. 假設它具有正的收斂半徑 R , 則該幂級數便表一實函數, 其定義域包含開區間 $(c-R, c+R)$, 並具 $C^\infty(a, b) \subset (c-R, c+R)$. (意即該對應函數在 $[a, b]$ 上恆有連續導數.) 有這樣性質的函數便稱為可解析函數 (*analytic functions*.) 如 $e^x, \sin x, \cos x, \ln x$ 都可是解析函數. 但 $f(x) = e^{-1/x^2}$ 當 $x \neq 0$ 時, $f(0) = 0$ 便不是. (參見 p.227 例5.)

幂級數之應用——利用未定係數法求反導、解微分方程式、求可解析函數之近似值

解微分方程式相當於求反導. 就如以上所示, 求反導並非是一件容易之舉. 本書在此提供此欄只在強調求反導有此之用處而已. 詳細請參閱有關微分方程式一類之專書. 茲介紹兩型最簡單的微分方程式之解法供參考. 一是線性微方, 另一是以幂級數為解的微方. 請讀者著重在其如何將所予微方化成可求反導之形式.

例1 試解線性微分方程式 $y' + f(x)y = g(x)$.

解 首先想辦法把左側化成單項函數的導數(利用求導的積律)則可將所予方程式變為

$$(e^{\int f(x)dx} y)' = g(x)e^{\int f(x)dx}.$$

其次,上式兩側取反導,得

$$e^{\int f(x)dx} \cdot y = \int g(x)e^{\int f(x)dx} dx$$

$$\therefore y = e^{-\int f(x)dx} \left[\int g(x)e^{\int f(x)dx} dx + C \right]$$

此即為所予微分方程式之解.

驗證 將所得之解取導數即知它確為所予微方.

註:如前之代數方程式,所得之解亦須驗證一樣,微分方程式之解亦得驗證,蓋解各種方程式均依反推法而得,即假設所予方程式成立之下進行求解的.

例2 (微方之冪級數解) 求微分方程 $y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$ 之解.

解 首先想辦法把左側化成單項函數的導數(利用求導的積律)則可將所予方程式變為(兩邊乘以 y')

$$y'y'' + yy' = (y'^2 + y^2)' = 0$$

其次,上式兩側取反導,得 $y'^2 + y^2 = C$, 由 $y(0) = 0$ 及 $y'(0) = 1$ 得 $C = 1$.

$$\therefore y' = \sqrt{1 - y^2}$$

再次取反導得 $\sin^{-1} y + C_1 = x$ 其中再由 $y(0) = 0$ 得 $C_1 = 0$. 可見 $y = \sin x$ 為所予微分方程式之解.

驗證 將所得之解取兩次導數即知它確為所予微方之解.

另解 上解中,兩邊會乘以 y' 是關鍵,讀者能想到嗎? 為此,此處改用冪級數來進行. 設所予方程式之解(為一實函數以冪級數表示)為 $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 利用冪級數之微分法代入,得

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

由冪級數之相等性質知 $a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)}, n = 2, 3, \dots$. 另外,由 $y'(0) = 1, y(0) = 0$ 得 $a_0 = 0, a_1 = 1$, 再由所得之遞迴式,可確切得 $a_2 = 0, a_3 = \frac{a_1}{3(3-1)} = \frac{1}{3!}, \dots, a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, n \in \mathbb{N}$. 將此等係數代回原所予冪級數即知此即 $\sin x$ 之冪級數表示,與前解一致.

例3 求 $\ln 1.2$ 之近似值精確至小數第四位.

解 欲直接由定義算亦可, 惟精確度不易卻定. 故改用冪級數進行. 由對數函數之 Taylor 級數知

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 \leq x < 1.$$

據此, 以 $x = 0.2$ 代入得

$$\ln 1.2 = [.2 - \frac{(.2)^2}{2} + \frac{(.2)^3}{3} + \frac{(.2)^4}{4} - \frac{(.2)^5}{5}] \approx 0.1832$$

註: 本例亦可利用 $\ln \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots)$ 再以 $x = \frac{1}{11}$ 代入亦可得 $\ln 1.2 = .1832$, 可以少算若干項 (因收斂較快!), 請讀者留意.

例4 (利用冪級數算近似值) 試求算定積分 $\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4} dx$ 之近似值至小數第五位止.

解 欲直接求反導有困難, 故改用冪級數進行. 由二項級數 (Taylor 級數之一) 知

$$\sqrt{1+x^4} = (1+x^4)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{8}x^8 + \frac{1}{16}x^{12} - \frac{5}{128}x^{16} + \cdots$$

據此, 再依冪級數之逐項積分法得

$$\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4} dx = [x + \frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{72} + \frac{x^{13}}{208} + \cdots]_0^{0.4} \approx 0.40102.$$

註: 至於冪級數須取到第幾項才合乎所求, 就看所須之近似值精確到幾位小數, 由實際計算可確定.

7.7 本章統合

本章建立了實函數的局部表示法, 當所予函數在所予 c 之鄰域 $(c-R, c+R)$ 上, 均可微分時, 下等式成立:

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x-c)^k, \forall x \in (c-R, c+R),$$

只要誤差項 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(\bar{c}) = 0$, 其中 $\bar{c} \in (c - R, c + R)$.

有了上述所予函數之高階近似式表示法後, 就可以局部的 (locally) 知悉該實函數的一些特性, 如平均性、協和性、代表性等等, 分述如下.

i) 表示性 (representative): 亦即 C^∞ -實函數的多項式化表示. 須知所予函數在某點的高階近似表示未必存在. 一旦存在 (即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(\bar{c}) = 0$) 時, 則可引發該函數諸多其他特性如下所示.

ii) 高階平均性 (higher order means): 若 $f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$ 在 c 之某鄰域上, 有高階平均值 ($\frac{f^{(n+1)}(\bar{c})}{(n+1)!}$) 的意味.

iii) n 次多項式近似性 (n^{th} -approximation): 若 $f(x)$ 在所予 c 之鄰域 ($c - R, c + R$) 上, 均可微分時, 則

$$f(x) \approx f(c) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k, \forall x \in (c - R, c + R),$$

7.8 練習題

1. 試求下列各冪級數之收斂半徑及收斂區間.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

2. 試求表示下列函數的冪級數, 並求其收斂區間. 當表出所求的冪級數時請附其第 n 項.

a) $\frac{1}{1+3x}$ b) $\frac{x}{1-2x}$ c) $\frac{3}{1-x^3}$

3. 試求下列各冪級數收斂集合.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{n2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-3)^n}{4^n \sqrt{n}}$

4. 若 $p > 1$, 試求下式之值.

$$\frac{1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots}{1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots}.$$

5. 試求方程式

$$+\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} + \frac{x^3}{6!} + \cdots = 0$$

之解。(提示:分 $x \geq 0$ 及 $x < 0$ 來考慮.)

6. 試證 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0, \forall x \in (-R, R), R > 0 \Rightarrow a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

7. 試證:若方程式 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$, 則 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$

8. a) 令 $f_n(x) = 2x + \frac{1}{n}$, 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

b) 令

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{當 } x < 1/n \text{ 時} \\ 1 & \text{當 } x \geq 1/n \text{ 時} \end{cases}$$

試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

9. 設 $f_0(x)$ 連續於 $[0, a]$, 並令 $f_n(x) = \int_0^x f_{[n-1]}(t) dt$. 試證 $f_n(x)$ 一致收斂至 0 當 $0 \leq x \leq a$ 時.

10. 考慮函數級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2(1+x^n)}$. 試證

- (a) 當 $x \geq 0$ 時所予級數一致收斂;
- (b) 當 $|x| \leq a$ 時, 其中 $0 < a < 1$, 所予級數一致收斂;
- (c) 當 $b \leq x$ 時, 其中 $-1 < b$, 所予級數一致收斂;
- (d) 當 $x \leq -c$ 時, 其中 $c > 1$ 所予級數一致收斂.

11. 下列函數列一致收斂嗎?

- a) $x^{1/n}$
- b) $(\sin x)^n$
- c) $(\sin x)^{1/n}$
- d) $nx e^{-nx}$

12. 下列函數級數一致收斂嗎?

- a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$
- b) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos nx / n^2$
- c) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$
- d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$

13. 試求 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$ 之定義域, 並問 $f(x)$ 是連續函數嗎?
14. 若 $f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$, 試求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 並問過程中用到一致收斂嗎?
15. 試證函數級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/(n+x^2)$ 對所有實數一致收斂, 但不絕對收斂.
16. 若兩函數列 $\{f_n(x)\}, \{g_n(x)\}$ 均在 $[a, b]$ 上一致收斂, 試證它們之和、差與積亦均一致收斂.
17. 試證: 若 $\{f'_n(x)\}$ 一致收斂至 $f'(x), x \in [a, b]$, 則 $f_n(x)$ 亦一致收斂至 $f(x), x \in [a, b]$. 反之則不成立.(舉一例即可.)
18. 試求下列函數之 Maclaurin 級數.
a) $\ln \left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ b) $\frac{1}{1+x+x^2}$ c) $\sin^2 x$
19. 利用 Maclaurin 級數求 $\sin 3^\circ$ 之近似值至小數第五位.
20. a) 試求 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ 之冪級數.
b) 利用 a), 求 $\frac{1}{\sqrt[3]{1.1}}$ 之近似值至小數第三位.
21. 令 $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n$.
a) 試微分此冪級數證明

$$g'(x) = \frac{pg(x)}{1+x}, |x| < 1.$$

- b) 令 $h(x) = (1+x)^{-p}g(x)$. 試證 $h'(x) = 0$
c) 推出 $g(x) = (1+x)^p$.

22. 利用冪級數積分法求下列定積分之近似值精確至小數點第四位止.

a) $\int_0^1 \cos x^2 dx$ b) $\int_0^{0.5} \sin \sqrt{t} dt$

23. a) 試求函數 $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x-1}{x}\right)$ 之冪級數.

b) 試證

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}.$$

24. 利用 Taylor 級數算定積分 $\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^7}$ 之值至小數點四位.

25. 求下列函數在 $c = 0$ 處的 Taylor 級數

a) $\frac{x}{x^2-3x+2}$ b) $\int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$
 c) $\int_0^x \frac{\tan^{-1}t}{t} dt$ d) $\int_0^x \frac{e^{t^2}-1}{t^2} dt$

26. 求下列各級數之和 (從所熟悉的級數中認出).

a) $\frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \dots$
 b) $2x + \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + \frac{16x^4}{4} + \dots$
 c) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$

27. 利用代換法求下列函數的幕級數至 3 次方項.

a) $\tan^{-1}(e^x - 1)$ b) e^{e^x-1}

28. 求級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{3^n}$ 之和.

29. 試求下列不定積分的幕級數.

a) $\int x \cos x^3 dx$ b) $\int \frac{e^x-1}{x} dx$ c) $\int \tan^{-1} x^2 dx$

30. 利用幕級數求下列定積分之值在所予精確度下.

a) $\int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ ($|error| < 10^{-8}$)
 b) $\int_0^{0.5} x^2 e^{-x^2} dx$ ($|error| < 0.001$)

7.9 第七章習題解答

1. a) $|3x - 2| < 1$, 即 $1/3 < x < 1$ 但因 $x = 1/3$ 亦可使所予級數收斂 (由交錯級數檢定法知). 故得收斂區間為 $[1/3, 1)$ 而收斂半徑為 $(1 - 1/3)/2 = 1/3$.

b) 收斂半徑為 4; 收斂區間為 $[-4, 4)$

c) 收斂半徑為 1/4; 收斂區間為 $[1, 3/2]$

2. a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-3x)^n$; 收斂區間為 $(-1/3, 1/3)$

b) $x \sum_{n=0}^{\infty} x(2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{n+1}$; 收斂區間為 $(-1/2, 1/2)$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3(x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{3n}$; 收斂區間為 $(-1, 1)$.

3. a) a) $[-1, 1/3)$, $|\frac{3x+1}{2}| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1/3$; 另 $x = -1$ 時, 所予級數為收斂的交錯級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$; $[-1, 1/3)$

b) $[-1/2, 7/2), |\frac{(2x-31)}{4}| < 1 \Leftrightarrow -1/2 < x < 7/2$; 另 $x = -1/2$ 時, 所予級數為收斂的交錯級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$; $(-1, 7/2]$.

4. 令所予式 K , 則由實際相除得 $K = 1 + \frac{2}{2^p} K$. 解此式得 $K = \frac{2^p}{2^p - 2}$. (其中 $p > 1$ 只表所予式收斂且結果有意義(其分母不為0)).

5. 當 $x \geq 0$ 時顯然所予方程式無實解(因每一項均正.) 當 $x < 0$ 時, 由 \cos 之冪級數表示法知所予方程式可表成 $\cos i\sqrt{x} = 0$. 有此得 $x = -(n\pi \pm (\pi/2))^2, n \in \mathbb{Z}$.

6. 令 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 則由 $f^{(n)}(0) = 0$ 可得證所要之結論.

7. 由實數之性質易得知.

8. a) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 2x$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$.

9. 由所設得 $|f_n(x)| = |\int_0^x f_{n-1}(t) dt| = \cdots = |\int_0^x \cdots \int_0^x f_0(t) dt| \leq M \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \rightarrow 0$, 當 $n \rightarrow \infty$ 時. 其中由題設知 $|f_0(x)| \leq M$ (因 $f_0(x)$ 在 $[0, a]$ 上連續.)

10. a) 當 $x \geq 0$ 時, 所予級數一致收斂(因級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂且 $|\frac{x^n}{n^2(1+x^n)}| \leq \frac{1}{n^2}$.)

b) c) d) 均仿 a) 進行.

11. a) No (在 $x = 0$ 處不一致收斂)

b) No (在 $x = \pi/2$ 處不一致收斂)

c) No (在 $x = 0$ 處不一致收斂)

d) No (在 $x = 0$ 處不一致收斂)

12. a) No (在 $x = 1$ 處不一致收斂)

b) Yes (因級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂且 $|\frac{\cos nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$.)

c) No (在 $x = 0$ 處不一致收斂)

d) Yes (因級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收斂且 $|\frac{1}{n^2+x^2}| \leq \frac{1}{n^2}$.)

13. 當 $x \neq 0$ 時, 因 $1 - x^2 < 1 + x^2$, 故知 $\frac{1-x^2}{1+x^2} < 1$. 可見 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1-x^2}{1+x^2})^n = 0$ 由此得 $f(x) = 0, \forall x \neq 0$. 另當 $x = 0$ 時, 易知 $f(x) = 1$. 故得 $f(x)$ 之定義域為 \mathbb{R} , 且 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處不連續.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{n} = 1 + 0 = 1$. 其中第一等號用到一致收斂.

15. 因級數 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ 收斂且 $|\frac{(-1)^n}{n+x^2}| \leq \frac{1}{n}$. 顯然所予級數不絕對收斂.

16. 設 $f_n(x), g_n(x)$ 分別一致收斂至 $f(x), g(x)$. 則對任予正數 ε ,

$$|(f_n \pm g_n)(x) - (f \pm g)(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

對任予之 x 均成立, 當 n 足夠大時. 同理, 則對任予正數 ε ,

$$|(f_n \cdot g_n)(x) - (f \cdot g)(x)| \leq |f_n(x) - f(x)||g_n(x)| + |f(x)||g_n(x) - g(x)| < \varepsilon,$$

對任予之 x 均成立, 當 n 足夠大時. (其中 $g_n(x), f(x)$ 均在所予區間上有界.)

17. 考慮 $f_n(x) = f_n(x_0) + (x - x_0)f'_n(x)$ (此式得自導數平均值定理) 在由上題得 $f_n(x)$ 一致收斂 (其中用到 $f_n(x_0)$ 收斂之假設)

反例如 $f_n(x) = x^n/n$ 在 $(-1, 1)$ 上一致收斂, 但 $f'_n(x) = x^{n-1}$ 在 $(-1, 1)$ 上不一致收斂.

18. a) $\ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \ln |1-x| - \ln |1+x| = -2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right), |x| < 1.$

b) $\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (x^3 - x^{3n+1}), |x^3| < 1.$

c) $\sin^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}.$

19. $3^\circ = \frac{3\pi}{180} = \frac{\pi}{60}, \therefore \sin 3^\circ = \sin(\pi/60) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big|_{x=\pi/60} \approx 0.05236.$

20. a) $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} = (1+x)^{-1/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} x^n = 1 + (-1/4)x + \frac{-1/4 \cdot -5/4}{2!} x^2 + \frac{-1/4 \cdot -5/4 \cdot -9/4}{3!} x^3 + \dots$

b) 即上式當 $x = 0.1$ 時之值. $\frac{1}{\sqrt[4]{1.1}} = 1 - \frac{1}{4}(0.1) + \frac{5}{32}(0.1)^2 - \frac{45}{6(4^3)}(0.1)^3 + \dots$
 $= 1 - 0.025 + 0.0017 \approx 0.0767.$

21. a) $(1+x)g'(x) = (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} n x^{n-1} = p \sum_{n=1}^{\infty} \binom{p-1}{n-1} x^{n-1} (1+x) = p \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{p-1}{n} + \binom{p-1}{n-1} \right) x^n$

$= p \sum_{n=0}^{\infty} \binom{p}{n} x^n = pg(x)$

b) $h'(x) = -p(1+x)^{-p-1}g(x) + (1+x)^{-p}g'(x) = -p(1+x)^{-p-1}g(x) + (1+x)^{-p} \frac{pg(x)}{1+x} = 0$

c) 因 $g(0) = 1$, 故 $h(0) = 1$ 由 b) 得 $g(x) = (1+x)^p$.

22. a) $\int_0^1 \cos x^2 dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} \frac{x^{13}}{13(6!)} + \dots \right) dx$
 $= x - \frac{x^5}{5(2!)} + \frac{x^9}{9(4!)+\dots} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{13(6!)} \approx 0.9045.$

b) $\int_0^{0.5} \sin \sqrt{t} dt = \int_0^{0.5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{t})^{2n+1}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{(2n+3)/2}}{((2n+3)/2)(2n+3)!} \Big|_0^{0.5}$
 $= \frac{(0.5)^{3/2}}{(3/2)} - \frac{(0.5)^{5/2}}{(5/2)3!} + \frac{(0.5)^{7/2}}{(7/2)5!} + \dots \approx 0.6237.$

$$23. \text{ a) } \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}.$$

b) 由 a) 得 $\frac{d}{dx} \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n!}$, 即 $\left. \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} \right|_{x=1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n!} \Big|_{x=1}$ 兩邊化簡即得證欲證式。(右側須以 $n+1$ 取代 n .)

$$\begin{aligned} 24. \sqrt{1+x^7} &= (1+x^7)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x^7)^n. \\ \therefore \int_0^{0.4} \sqrt{1+x^7} dx &= \int_0^{0.4} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} x^{7n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} \frac{x^{7n+1}}{7n+1} \Big|_0^{0.4} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{(0.4)^8}{8} + \frac{(1/2)(-1/2)(0.4)^{15}}{2! \cdot 15} + \dots \approx 1.0004. \end{aligned}$$

$$25. \text{ a) } \frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{-4x}{1-(2x-3)^2} = (-4x) \sum_{n=0}^{\infty} [(2x-3)^2]^n, |2x-3| < 1.$$

$$\begin{aligned} \text{ b) } \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt &= \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right) t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}, |x| < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ c) } \int_0^x \frac{\tan^{-1} t}{t} dt &= \int_0^x \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}}{t} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2n+1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}, |x| < 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ d) } \int_0^x \frac{e^{t^2}-1}{t^2} dt &= \int_0^x \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t^2)^n/n!}{t^2}}{t^2} dt \\ &= \int_0^x 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{3!} + \dots dt = x + \frac{x^3}{3(2!)} + \frac{x^5}{5(3!)} + \dots \end{aligned}$$

$$26. \text{ a) } \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$\text{ b) } \ln |1-2x|$$

$$\text{ c) } \frac{x-x^2}{(1-x)^2}$$

$$27. \text{ a) } \tan^{-1}(e^x - 1) = \tan^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)^{2k+1}}{2k+1} = \dots$$

$$\text{ b) } e^{e^x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right)^n}{n!} = \dots$$

$$28. \because \tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}, \text{ 在此令 } x = 1/\sqrt{3} \text{ 可得欲證式} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}.$$

$$29. \text{ a) } \int x \cos x^3 dx = \int x \sum_{n=0}^{\infty} x (-1)^n \frac{(x^3)^{2n}}{(2n)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{6n+2}}{(6n+2)(2n)!} + C.$$

$$\text{ b) } \int \frac{e^x-1}{x} dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{nn!} + C.$$

$$\text{ c) } \int \tan^{-1} x^2 dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2)^{2n+1}}{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)} + C.$$

$$30. \text{ a) } (1+x^3)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{8}{3}x^6 - \frac{5}{16}x^9 + \dots. \text{ 由於 } (0.1)^9 < (10)^{-8} \text{ 故得 } \int_0^{0.1} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}} = x - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + \frac{3}{8} \frac{x^7}{7} \Big|_{x=0.1} = 0.090005.$$

$$\text{ b) } x^2 e^{-x^2} = x^2 - x^4 + x^6/2 - x^8/6 + \dots. \text{ 茲因 } (0.5)^{10} < 0.001, \text{ 故算至前三項即可, 得 } 0.196.$$

