

# 第六章

## 積分法——單變實函數之反除法概念

內容

6.1 本章宗旨

6.2 認識定積分 (Definite Integrals)

6.3 如何求定積分——反導法 (微積分基本定理)、積分技巧、數值積分法、冪級數法

6.4 有了定積分後,實函數有何特性?

——可積分性、平均性 (實函數平均值定理之積分型)、斂散性、協和性 (homogeneity)

6.5 相關題材——瑕積分、級數的斂散性、Reimann-Stieltjes 積分

6.6 本章統合——定積分就是一種實函數的反除法

6.7 練習題及解答

### 6.1 本章宗旨

本章專門討論函數  $f(x)$  所引出之極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$ , 即  $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上所對應的黎曼和之極限是否存在的問題, 亦即一般所謂的定積分 (Definite Integral) 是否存在的問題.

定積分可解讀為一種協和 (Homogeneous Sum) 極限——一種‘平均中的平均’, 當在一定比例的考慮下 (Up to a constant factor). (詳見 p.196.)

求定積分亦可視為一種反除法運算, 透過黎曼和的極限來找到‘被除’函數. (詳見 p.195.) 反除法就是如何從所予之‘商’式中找回‘被除’函數.

## 6.2 認識定積分

定積分之定義——黎曼和之極限

黎曼和 (The Riemann Sum) 之極限

Let  $f$  be a real function defined on a closed interval  $[a, b]$ . For any partition  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  of  $[a, b]$ , let the numbers  $c_k$  be chosen arbitrarily in the subintervals  $[x_{k-1}, x_k]$ .

If there exists a number  $I$  such that

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = I,$$

no matter how  $P$  and the  $c_k$ 's are chosen, then  $f$  is *integrable* on  $[a, b]$  and  $I$  is the *definite integral* of  $f$  over  $[a, b]$ .

意即, 令  $f$  為定義在閉區間  $[a, b]$  上的實函數. 對  $[a, b]$  的任何分割  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , 而  $c_k$  為從子區間  $[x_{k-1}, x_k]$  中任選的實數.

若有一數  $I$  存在使

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = I$$

不論  $P$  與  $c_k$  怎麼選取, 則  $f$  稱為在  $[a, b]$  上之可積分函數, 而  $I$  就稱為  $f$  在  $[a, b]$  上的定積分.

針對上列定義, 有下列幾點補充.

i) 什麼叫分割? ( $x_0 = a, x_n = b$ ).  $\|P\|$  表分割  $P$  之最大子區間長, 而  $\|P\| \rightarrow 0$  表分割要細 (finer) 之意.  $\Delta x_k$  表子區間  $[x_{k-1}, x_k]$  之長.

ii)  $I$  因會常用到, 就以記號  $\int_a^b f(x) dx$  表之, (記住, 它為一極限值, 即定數). 其中的  $a, b$  為定數, 分別稱為定積分的下上限 (*lower limit/upper limit*). 特別稱  $f(x)$  為定積分的被積分函數 (*Integrand*). 另外,  $dx$  表對變數  $x$  取定積分之意.

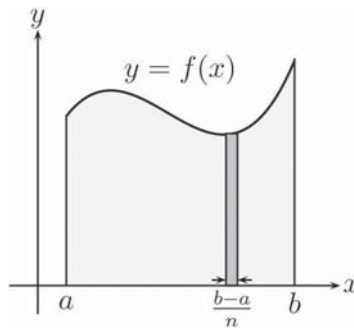
iii) 通常直接算極限 (即定積分) 時, 所使用的分割常取為閉區間  $[a, b]$  上的等分割, 即  $P$  為由  $[a, b]$  之  $n$  等分點組成.

iv) 請注意,  $f$  在定義中只是一個實函數而已, 未告知具有其他性質如連續等. 所以, 定義中的極限  $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k = I$  未必存在. 能使其存在的函數便稱具可積分性 (Integrability) 之函數

v) 記住記號  $\int_a^b f(x) dx$  表一極限值, 此極限值跟  $a, b$  與  $f$  有關, 但與  $x$  無關 (故  $x$  稱為虛變數 (dummying variable)). 故  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$ . 又由定義易知

$$\int_a^a f(x) dx = 0; \quad \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

vi) 和  $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$  稱為黎曼和 (Riemann sum), 為紀念德國數學家 Georg F. Bernhard Riemann 在這方面的貢獻而取的, 而黎曼和所對應的特殊極限 (若存在時) 便稱為黎曼積分 (Riemann Integral). 至於黎曼和有何特別意涵? 實際上黎曼和  $\sum_{k=1}^n f(c_k) \Delta x_k$  在取極限後就跟和  $\sum_{k=1}^n f(a + k(b-a)/n) (b-a)/n$  的極限, 沒什麼不同, 而後者可表成  $(b-a) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f(a + 1(b-a)/n) + f(a + 2(b-a)/n) + \cdots + f(a + n(b-a)/n))$ , 由此不難得知, 黎曼和乃是函數  $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上的平均值再乘以  $(b-a)$ . 為此, 本書特稱黎曼和之極限值為函數在區間  $[a, b]$  的協和極限值, 如  $\int_a^b 1 dx = b-a$ ,  $\int_a^b x dx = (b-a)(b+a)/2$ . 於此只因在數學上為求一般化起見, 把它抽象至有點讓人感到 '面目全非' 罷了.



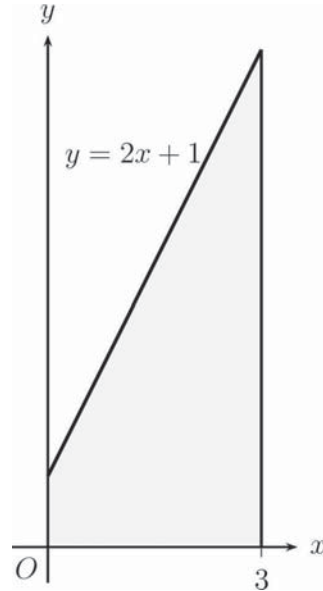
vii) 定積分可簡單解讀成: 總差值等於各小區段之瞬間平均值乘上對應份量加總後再取極限而得. 實用上則有各種解讀, 大同小異, 如下示.

a) 定積分的幾何解讀: 相當於求曲線  $y = f(x)$  下從  $a$  到  $b$  與  $X$  軸所圍成的弓形面積 (不妨在  $[a, b]$  上視  $f(x) \geq 0$  來解讀);

b) 定積分在物理上解讀: 相當於微距離之累積 (integrate) 成為總距離, 其中以  $f'(t) \Delta t$  表由速率  $f'(t)$  乘以瞬間時間  $\Delta t$  而得之微距離;

c) 定積分在經濟上的解讀：相當於微成本之累積成爲(總)成本,其中以  $f'(x)\Delta x$  表由邊際成本 (marginal cost)  $f'(x)$  乘以瞬間產量  $\Delta x$  而得之微成本 (微分)。

例1 令  $y = f(x) = 2x + 1$ , 試求定積分  $\int_0^3 f(x)dx$ .



解 參見附圖

取  $\Delta x = (3 - 0)/n, c_k = k(3 - 0)/n$ , 則

$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (2(3k/n) + 1)3/n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n (6\frac{k}{n} + 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3/n(3(n+1) + n) = 12 \end{aligned}$$

註：由本例可驗證定積分亦可用來求幾何上各直線形(如三角形、梯形等)的面積。

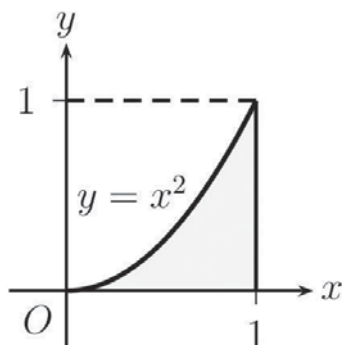
例2 令  $y = f(x) = x^2$ , 試求定積分  $\int_0^1 f(x)dx$ .

解 參見附圖

取  $\Delta x = (1 - 0)/n, c_k = k(1 - 0)/n$ , 則

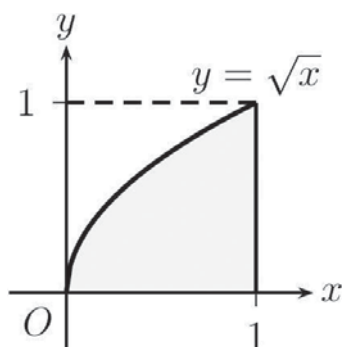
$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n ((k/n)^2)1/n$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^3 \sum_{k=1}^n (k^2) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n^2)((n+1)(2n+1)/6) = 1/3
 \end{aligned}$$



例3 令  $y = f(x) = \sqrt{x}$ , 試求定積分  $\int_0^1 f(x)dx$ .

解 參見附圖



取  $\Delta x = (1-0)/n$ ,  $c_k = k(1-0)/n$ , 則

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{k/n} (1/n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^{3/2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^{3/2} (?) = ?
 \end{aligned}$$

其中(?)待定.(解決之道就是靠微積分基本定理.)

定積分之運算性質

設  $f, g$  為閉區間  $[a, b]$  上的可積分函數, 則它們具有下列諸性質:

$$i) \text{ 線性性 (Linearity) } \int_a^b (\alpha f \pm \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx$$

其中  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , 並與  $x$  無關.

$$ii) \text{ 可加性 (Additivity) } \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

其中右側之諸定積分均有定義.

$$iii) \text{ 支配性 (domination): 在 } [a, b] \text{ 上, } f \geq g \text{ 且均可積分 } \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

另須知, 兩可積分函數之和、差、積、商亦為可積分; 當可合成時其合成函數亦為可積分. 惟沒有所謂的積分積律、商律或連鎖律. 又上述諸性質均可直接利用定積分之定義推證成立.

### 6.3 如何求定積分?

欲求定積分  $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$  有許多方法, 介紹如下.

#### 1° 反導函數 (antiderivatives) 法

是不是每次求定積分時都只有依據定義進行而已? 有沒有比較容易的方法? 告訴讀者這些問題的答覆都在下示定理中. 但是須知的是, 能直接找到被積分函數的反導者不多. 所以, 微積分基本定理適用的範圍有限. 不過, 能如此已屬不易了.

#### 微積分基本定理 (The Fundamental Theorem of Calculus) — 簡稱 FTC

If  $f$  is continuous on  $[a, b]$ , then

i) the function

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

has a derivative at every point  $x$  in  $[a, b]$ , and

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

That is,  $F(x)$  is an *antiderivative* (反導) of  $f$  on  $[a, b]$ .

ii)

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a),$$

where  $G$  is any antiderivative of  $f$  on  $[a, b]$ .

意即, 若  $f$  在  $[a, b]$  上連續, 則

i) 由定積分所定義的函數

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

必在  $[a, b]$  上具可微分性, 且其導數為

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

ii) 定積分:

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a),$$

其中  $G$  為  $f$  在  $[a, b]$  上的任予反導函數 (antiderivative).

註: 由微積分基本定理知一實函數之定積分 (看成函數時) 乃是它的反導, 可見算定積分時不用每次都去算其對應的黎曼和的極限. 如此可說省了不少麻煩. 只是能找到反導之函數不多, 所以還是要依靠其他方法來輔助求定積分.

### 定理證明

i) 直接由導數定義進行:

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \Delta x}{\Delta x} = f(x) \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

註 1:  $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$  可直接視為  $f(x)$  之積分函數的微分, 為定積分之退化情形. (如此之下, 似乎一開始  $f(x)$  之連續假設是多餘的.)

註 2: 當  $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上可積分時, 須知  $f(x)$  亦在區間  $[a, b]$  之任何子區間上可積分. 可見  $\int_a^x f(t) dt$  都有意義 (well-defined),  $\forall x \in [a, b]$ .

ii) 由 i) 知,  $F$  為  $f$  之一反導, 可見  $G(x) = F(x) + C$  (請參考 p.132 例 2), 其中  $C$  為積分常數 (integral constant). 須知  $F(a) = 0, F(b) = \int_a^b f(t)dt$ . 茲以  $F(x) = G(x) - C$  代入得  $\int_a^b f(t)dt = F(b) = G(b) - C = G(b) - G(a)$ . 證畢.

此定理之稱為微積分基本定理 (常以 FTC 簡稱之), 乃是它把微分與積分本來在定義上沒有關連兩樣運算, 建立起互為反運算的關係, 殊為難得.

針對此基本定理, 有下列幾點補充:

1) 上定義中的  $F(x)$  確實是  $[a, b]$  上的函數嗎? 這是因為  $f$  是  $[a, b]$  上的連續函數之故.  $F(x)$  不但對每一  $x \in [a, b]$  存在, 而且  $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0, F(b) = \int_a^b f(t)dt$ .

2) 特別注意  $F$  在閉區間  $[a, b]$  為可微分的用意? 惟在端點的導數所對應之極限須改為單側極限.

3) 利用函數的微分 (differential),  $\int_a^b f'(x)dx$  可表成  $\int_a^b df$ . 再依據基本定理可進一步得  $f(b) - f(a)$ . 由此得知一函數之微分的累積 (積分) 就是原函數 (primitive function), 亦即該函數之反導.

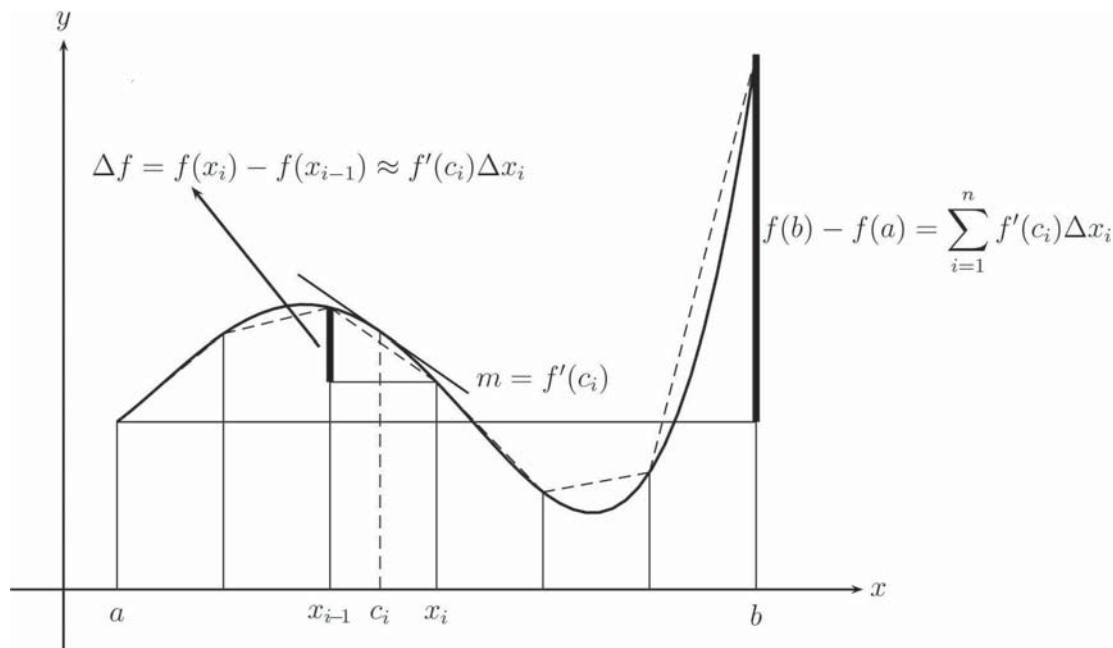
4) 微積分基本定理 ii) 之另一證法:

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{|\Delta x_k| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^n f(c_k) \Delta x_k &= \lim_{\substack{|\Delta x| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^n \frac{F(x_k + \Delta x_k) - F(x_k)}{\Delta x_k} \Delta x_k \\ &= \lim_{\substack{|\Delta x| \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=0}^n [F(x_k + \Delta x_k) - F(x_k)] = F(b) - F(a). \end{aligned}$$

其中最後的等式之左側屬對消型而得之和, 故只剩下首末兩端 ( $x_0 = a, x_n = b$ ) 所對應函數值之差, 而右側則剛好是函數  $f(x)$  所對應在區間  $[a, b]$  上之黎曼和. 如此之下, 兩邊再取極限即得所謂的微積分基本定理 ii).

(5) 由基本定理 ii) 可得  $\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = G(g(x)) - G(h(x))$ .

(6) 微積分基本定理的幾何解讀:  $f(b) - f(a) = \sum (f'(x_i) \Delta x_i)$  式之右側可解讀為諸高  $f'(x_i) \Delta x_i$  之極限和, 而左側可解讀為所予曲線首尾高度之差. 如附圖所示.



(7) 微分的累積就是定積分 ( $f(b) - f(a) = \lim \sum df = \int_a^b f'(x)dx$ .) 欲找出事情變化的原因, 是不是從相鄰的差異查起? 從小差異之累積是不是比較容易看出變化的主因? 把小差異  $f(x_i) - f(x_{i-1})$  透過平均值定理換成  $f'(c_i)(x_i - x_{i-1})$ , 這不就是定積分的主題嗎? 求定積分不就相當於求'被除式'(為一實函數)? 按此, 求一函數之反導可想成相當於求某'被除式', 當它被一次式  $(x - c)$  時會以該函數為商者. 只是一般函數不像多項式有除法的說法罷了.(再參考 p.194.)

#### 附記: 微積分發展簡史

相傳在古埃及時期就爲了要測量土地以求土地面積起見, 名人阿基米德(Archimedean)便利用上述的定積分方法在求曲線圍起來區域的面積, 如拋物線  $y = x^2$  下與  $x$  軸以及  $x = 1$  所圍成的區域.(見 p.154 例 2). 但對曲線  $y = \sqrt{x}$  下與  $x$  軸以及  $x = 1$  所圍成的區域, 欲求其面積便一籌莫展. 主要因當時還沒有導數的概念, 更談不上會求反導, 所以就無法進一步推展. 如此就耽擱了將近兩千年, 到牛頓時代, 發展出導數及其在運動學上的用處, 同時又發現了所謂的微積分基本定理, 才克服了早期求定積分的困難. 依據上事實, 易知在微積分的發展史上, 積分的概念比微分的概念早近兩千年. 意表積分比較實用. 但微積分真正的發展則從十六七世紀牛頓時代才開始. 很多人認爲牛頓是微積分的創始人, 因爲他建立了導數的概念及理論, 供獻良多. 須知有了微積分基本定理, 把微分與積分緊密的連結在一起, 微積分(Calculus)才算一門正式的課程, 爲新鮮人所必修之課.

例1 利用基本定理求下列函數的導數.

a)  $\int_{-\pi}^x \cos t dt$     b)  $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

解

a)  $\frac{d}{dx} \int_{-\pi}^x \cos t dt = \cos x$  由FTC i) 得, 當  $f(t) = \cos t$  時.

b)  $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{1}{1+x^2}$  由FTC i) 得, 當  $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$  時.

例2 利用基本定理求下列函數的導數.

a)  $\int_0^{2x} \cos t dt$     b)  $\int_0^{\sqrt{x+2}} \cos t^2 dt$

解 a) 由基本定理 ii) 得  $\int_0^{2x} \cos t dt = \sin(2x) - 1$ . 故  $\frac{d}{dx} \int_0^{2x} \cos t dt = \cos(2x) \cdot 2 - 0$ . 或:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{2x} \cos t dt = \frac{d}{dx} [\sin t \Big|_0^{2x}] = 2 \cos 2x.$$

註: 本例屬可直接求得所予被積分函數的反導, 再取導數不算難, 但請見 b) 例.

b)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\sqrt{x+2}} \cos t^2 dt = \frac{d}{du} \int_0^u \cos t^2 dt \frac{du}{dx} \text{ 其中 } u = \sqrt{x+2}$$

由前例知及FTC i) 得

$$\begin{aligned} &= (\cos u^2) \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \\ &= \cos(x+2) \cdot \frac{1}{\sqrt{x+2}}. \end{aligned}$$

上章介紹的主題是求導法, 亦即微分法 (Differentiations). 其重要性已如上章所示可見一斑. 很自然的, 在數學上就想問: 如何在所予函數之下反求以它為導函數的 '原' 函數 (primitive function), 此即所予函數的反導函數?

欲求某函數之反導, 實即前示求導數之反運算. 是不是任予一函數都可找到它的反導呢? 若可, 怎麼找? 因為找所予函數的反導, 相當於要找一函數使之具有其導數為已予函數者之意. 須知除非基本且熟悉的函數, 要找出一函數之反導, 並非易舉之事. 另外, 所知實函數不像實數那麼有系統, 所以找反導不比找方程式之根. 讀者已知悉一函數要有導函數的條件了 (須為可微分函數), 那請問一函數要有反導的條件是什麼呢? 因為找反導相當於算定積分, 而能算定積分的函數須具可積分條件 (詳見下一

節), 據此可知, 一所予函數要有反導的條件是它須具可積分性. 至於一函數具可積分性究竟'長'得怎麼樣, 就請看下一節.

函數  $f(x)$  的反導, 以  $D_x^{-1}f(x)$  或  $\int f(x)dx$  表之. 反導函數若存在, 須知未必唯一, 彼此之間可差一常數. 此時的  $f(x)$  就稱為被積分函數 (*Integrand*).  $f(x)$  之反導亦稱為  $f(x)$  之不定積分 (Indefinite Integrals) (其中'不定'指含積分常數  $C$  之意.)

例1 試求  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  之反導.

解 想想看, 依據求導的閱歷,

$$(?)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

其中的? 會是什麼樣的函數? 在此請讀者確實嘗試一下. 答案請參見變數變換法例 2(p.169).

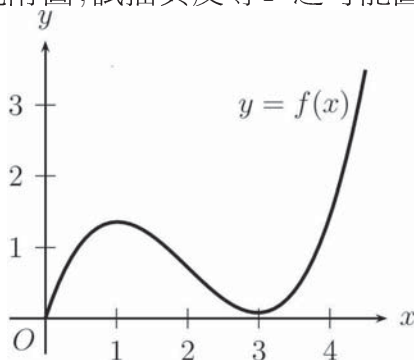
註: 有些函數的反導極易求得. 有些則否, 尤其如上例. 由於有一些函數, 如反三角函數及對數函數, 本身是超越函數但其導函數卻是代數函數, 如上例. 這就是求反導之所以困難之處. 解決之道只有訴諸'積分技巧'了. (詳見本章第 6.3 節.)

例2 試求  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$  之反導.

解  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$  之反導為  $D_x^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}$ , 或  $\int \sqrt{1+x^3} dx$ .

註: 上示答案讀者也許認為不是真正的答案, 有點虛應付的味道. 須知函數  $\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}$  的確沒有適當的函數可用來表示它, 儘管它在當  $x > 0$  時都連續, 但從已知的函數中就是找不到適合的函數來表示它的反導, 所以只好以上示之函數表之. 另外, 因此時尚含反導號或積分號, 故不用加積分常數.

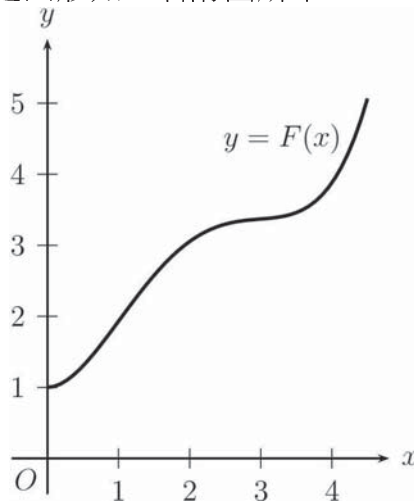
例3 由所予之  $f$  之圖形, 見附圖, 試描其反導  $F$  之可能圖形.



問: a)  $F$  於何處遞增? 何處遞減?

- b)  $F$  於何處凹向上?何處凹向下?  
 c)  $x$  於何處時,  $F$  有反曲點?  
 d) 若  $F(0) = 1$ , 試描  $F$  之圖形.  
 e)  $f$  的反導有多少個?

解 a) 由附圖知, 對  $x > 0$ ,  $f(x) > 0$ , 可見  $F(x)$  在區間  $(0, \infty)$  上遞增. (因  $F'(x) = f(x)$ .)  
 b)  $F$  在區間  $(0, 1)$  及  $(3, \infty)$  內凹向上; 在區間  $(1, 3)$  內凹向下. (因  $F''(x) = f'(x) > 0$  當  $x \in (0, 1)$  或  $(3, \infty)$  時.)  
 c) 由 b) 及反曲點之定義得  $x = 1$  及  $x = 3$  處是函數  $F$  發生反曲點之處.  
 d) 綜合以上 a), b), c) 可得  $F$  之圖形如上右附圖所示.



e) 因  $(F(x) + C)' = f$ , 其中  $C$  可為任予常數, 可見  $F(x) + C$  均可為  $f$  之反導, 故  $f$  之反導有無限多個.

求不定積分 (Indefinite Integrals) 之基本公式

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1. \quad \text{其中 } n \text{ 為與 } x \text{ 無關之任予實數}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad \text{其中 } x \neq 0$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - x + C$$

以上只列出最基本的求不定積分公式做參考. 其他的大約可透過積分技巧(見第6.3節)變換而得. 在此就不再佔篇幅了.(此時欲證上列諸公式成立,可直接取右側之導數驗證之.)

**例1** 試證  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$

**證** 可將右側取導數看看是否為左側之被積分函數.

$$\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C \right\} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} \right] = \frac{1}{1-x^2}$$

得證.

註:讀者能直接想到  $\frac{1}{1-x^2}$  的反導為  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$  嗎?恐怕不容易吧!對策就要靠'積分技巧'了.(詳見p.166例3—部分分式之積分法).

**例2** 試證  $\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$

**證** 可將右側取導數看看是否為左側之被積分函數.

$$\frac{d}{dx} \{ \ln |\sec x + \tan x| + C \} = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

得證.

註:同樣的情形,讀者能直接想到  $\sec x$  的反導為  $\ln |\sec x + \tan x| + C$  嗎?這就有點要靠運氣是不?不然,可如下所示進行.

$$\begin{aligned} \int \sec x dx &= \int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d \sin x}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{du}{1 - u^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(1+\sin x)^2}{1-\sin^2 x} \right| + C = \ln \left| \frac{1+\sin x}{\cos x} \right| + C \\ &= \ln |\sec x + \tan x| + C \end{aligned}$$

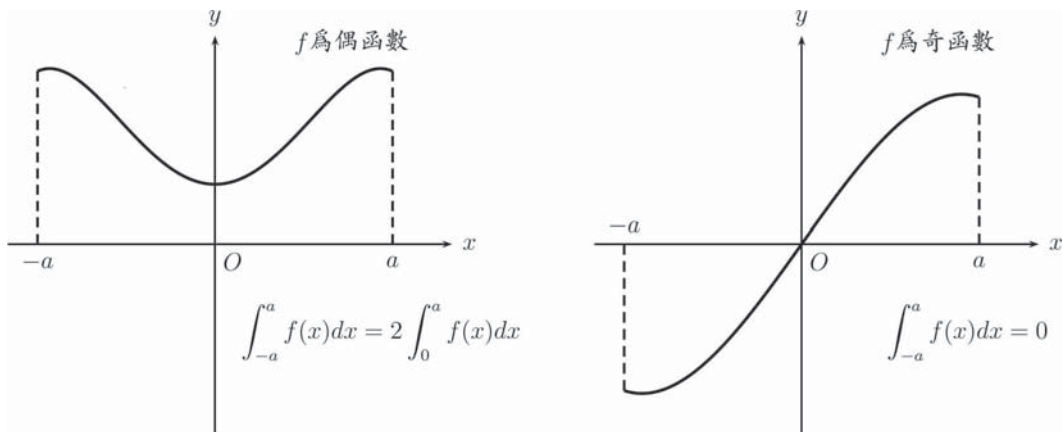
其中令  $u = \sin x$  餘請利用例1. 上列過程中, 讀者可能認為太冗長, 不太有趣而作罷. 其實, 是否為有趣的過程不在於其簡潔與否, 而在於它是否帶來啓發的效用?! 是以過程中, 何以會想到把  $\sec x$  換成  $\frac{1}{\cos x}$ ? 主要是大家對  $\cos x$  比較熟悉而已. 另外, 接下來怎知乘除  $\cos x$ ? 這是關鍵所在. 須知在三角函數上, 平方比較有公式可變換之故. 以上所示都只是在提供讀者一些嘗試的想法而已, 並非就保證一定有效. 又也許有人提供另一方法為:

$$\begin{aligned}\int \sec x dx &= \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx \text{ (即分子分母同乘以 } (\sec x + \tan x)\text{)} \\ &= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \ln |\sec x + \tan x| + C.\end{aligned}$$

很多讀者嘆為觀止. 其實此想法可遇不可求的——編者認為只在已知  $\sec x$  之反導為  $\ln |\sec x + \tan x|$  之下反推回去想到的, 讀者試想想看在不知  $\sec x$  之反導下, 怎知乘除因子  $(\sec x + \tan x)$ ? 所以編者仍推薦前法, 須知學數學不是只求解法之簡潔而已, 能同時給你多少啓示才要緊. 數學上很多有名的定理的證明都不是第一次就能見真章, 往往須要經歷長時間的修正及多人的努力. 可以這麼說, 許多簡潔的證明都是事後諸葛的, 不用大驚小怪.

## 2°. 函數之偶奇性所對應的定積分性質

由附圖不難知:



- i) 當  $f$  在  $[-a, a]$  上為偶函數且可積分時, 則  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .
- ii) 當  $f$  在  $[-a, a]$  上為奇函數且可積分時, 則  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

**例 1** 試利用函數的偶奇對稱性求下列定積分.

$$\text{a) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx \quad \text{b) } \int_{-1}^1 (1+x+x^2+x^3) dx \quad \text{c) } \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (|x| \sin^5 x + |x|^2 \tan x) dx$$

解 a) 因所予被積分函數為奇函數，故由 ii) 得  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = 0$ .

b) 所予被積分函數雖不是奇函數，但可表成偶奇之組合： $\int_{-1}^1 (1+x^2) + (x+x^3) dx$ ，在由 i) 及 ii) 得  $= 2 \int_0^1 (1+x^2) dx + 0 = 8/3$ .

c) 因所予被積分函數為奇函數，故由 ii) 得  $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (|x| \sin^5 x + |x|^2 \tan x) dx = 0$ .

### 3°. 積分技巧 (Techniques of Integration)

—所謂技巧是指如何想辦法將所予積分變換成具基本積分公式之意

依據微積分基本定理 ii) 知，欲求所予定積積分可藉由先找被積分函數的反導再以上下限代入相減而得。但須知找反導不是件容易之事，雖然書上列有不少的積分公式可資輔助找，但所予之定積分都不是‘等閒’之輩，並非一看即可代公式而得。對初學者來說，這常是一件困擾之事。一般而言，都得經過一番變換才能找到所要的反導。這就是設立本節的主要用意。

關於積分技巧，依據編者的心得是：

‘不怕加減，只怕乘除’。

須知兩實函數之積或商的積分未必是兩實函數積分之積或商，所以遇到被積分函數屬乘積型（尤其是三角函數，參照下示例 1）時，宜將它化成和差型；遇到商型時，宜將它化回未合併前的原分式，此即一般所謂的部分分式法。

另外就是：

‘碰到開方根式或分式時，把分式之分母或根式內之式化成單項’。

由於基本公式有關開平方根或方式之分母都只含單項之故。（因須用到連鎖律，方能找到所要的積分。請參考底下變數變換法之諸例）

**例 1** 試化解不定積分  $\int \sin 3x \cos 4x dx$ . (把乘除化為加減之例)

解 利用乘積化和差公式法進行：

$$\int \sin 3x \cos 4x dx = \int \frac{1}{2} [\sin(3x+4x) + \sin(3x-4x)] dx = \frac{1}{2} [-\cos(\frac{7x}{2}) + \cos x] + C.$$

註：請記得，化到沒有積分號時，補上積分常數。

**例 2** 試化解不定積分  $\int \sin^4 x dx$ . (乘冪化倍之例)

**解** 利用乘冪化倍角公式得：

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int [1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x] dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left[1 - 2 \cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right] dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{5}{4}x - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x\right] + C \end{aligned}$$

**例 3** 求不定積分  $\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx$  (部分分式積分法 — 不怕加減, 只怕乘除之例)

**解** 被積分函數是一分式型時, 欲求其反導因無法分子分母個別取反導而得, 只好另謀他途. 由於求積分怕乘除, 故只好想辦法化回它原是哪些分式之和? 所得的各項分式雖不見得馬上就可代公式求得其積分, 只須在透過變數變換法求得.

i) 首先將所予分式化成可能的簡單的分式之和:  $\frac{6x^2 - 4x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} = \frac{2}{4x+1} + \frac{x-1}{x^2+1}$ . (由所予分式之分母易知它是由兩個以  $(4x+1)$  與  $(x^2+1)$  為分母的分式所合併.)

ii) 由積分的線性性知

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} dx &= \int \frac{2}{4x+1} dx + \int \frac{x-1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{4dx}{4x+1} + \frac{1}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2} \ln |4x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \tan^{-1} x + C. \end{aligned}$$

茲介紹兩種比較有用的變換法, 以供讀者參考.

### I. 部分積分法 (Integration by Parts)

本法所依據的原理是微分的積法則, 即  $d(f \cdot g)(x) = df(x) \cdot g(x) + f(x)dg(x)$ . 對此式兩側取不定積分得

$$\int d(f \cdot g)(x) = \int df(x) \cdot g(x) + \int f(x)dg(x)$$

整理之並移項，使得部分積分法的公式：

$$\int g(x)df(x) = (f \cdot g)(x) - \int f(x)dg(x).$$

註1: 部分積分法中的部分 (parts) 是不是譯為‘角色’較好呢？把本來對  $f$  的積分換成對  $g$  的積分，好像是被積分的角色互換。本來不好找反導之積分式，是因積分的角色換了，可能就變成很容易找到所要的反導，這就是部分積分法的精神所在。

註2: 部分積分法中的  $dg$  表對函數  $g$  的微分，有時常進一步化成  $g'(x)dx$ ，有時就留著不變動。須知化開後的部分積分法，其中的積分式雖為標準型，但想進一步找反導時，常會有所迷失，蓋  $g'(x)$  混在被積分函數中不易辨認。惟只要讀者曉得其用意即足。另外，若讀者曉得積分論中的所謂 Riemann-Stieltjes 積分，那對此處的  $dg$  就更清楚了。(詳見 p.184)

**例1** 求不定積分  $\int \ln x dx$ .

**解** 利用部分積分法：令  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = x$ ，套部分積分法之公式得

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x d(\ln x) = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

註：何以知道令  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = x$ ？這是關鍵所在。一般而言，要找不定積分時，須先想一想什麼樣的函數，其導數會是被積分函數  $\ln x$  來反想回去。首先考慮  $x \ln x$ ，因此函數之導數會有  $\ln x$ ，當然沒有那麼湊巧之事，它剛好是欲求之反導，可能帶來‘不速之客’  $x(\ln x)' = 1$ 。惟此‘不速之客’是常數1，好解決。把1移到左側即可得如上解之結果。總而言之，遇到超越函數的積分時，透過部分積分法，換換被積分的角色，常有‘山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村’之感。

**例2** 求不定積分  $\int xe^x dx$ .

**解** 利用部分積分法：令  $f(x) = x$ ,  $g(x) = e^x$ ，套部分積分法之公式得

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

註：其實，本例即是上例之變型，此可透過下示之變數變換法，進行如下：當令  $e^x = t$  時，則  $x = \ln t$ ,  $dx = \frac{1}{t} dt$ ，則

$$\int xe^x dx = \int \ln t \cdot t \frac{1}{t} dt = \int \ln t dt.$$

## II. 變數代換法 (Change of Variables)

本法所依據的原理是利用求導的連鎖律, 即  $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ . 對此式兩側取反導即得

$$(f \circ g)(x) + C = \int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx.$$

有時, 所予要求的積分不易看出它是基本公式型. 這時可透過變數代換法, 令  $f(g(x))$  中的  $g(x)$  為一新的變數  $u$  做變數變換, 即  $\int f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f'(u) du = f(u) + C = f(g(x)) + C$ . 其中因  $u = g(x) \therefore du = g'(x) dx$ .

**例 1** 求不定積分  $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$ . (把分母或根式化成單項)

**解** 令  $1+x^2 = u$ , 則所予被積分函數可變換成  $\int \frac{du}{2\sqrt{u}}$ , 其中  $x dx = du/2$ . 可見由基本積分公式得

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

註: 碰到被積分函數含有根號或是分式型時, 宜把根號內的式子或分式型的分母整個看成單項, 經變數變換後, 比較能夠顯示出基本公式型, 以便利用基本積分公式. 如本例亦可秉此原則進行如下: 令  $x = \tan u$ , 則所予不定積分可化成

$$\int \frac{\tan u (\sec^2 u du)}{\sec u} = \int \tan u \sec u du = \int \frac{\sin u}{\cos^2 u} du = \frac{1}{\cos u} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

**例 2** 求不定積分  $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ . (把分母或根式內之式化成單項)

**解** 想仿上例進行, 對此例則有點困難. 如令  $1-x^2 = u$  或  $u^2$  都不像上例, 剛好分子有一  $x$  可配合成  $du$  型. 故此種代換算是失敗. 須另起爐灶. 如令  $x = \sin \theta$ , 則所予之不定積分可變換成  $\int \frac{\cos \theta d\theta}{\cos \theta} = \int d\theta$ , 變成很容易積分的型式, 即  $\theta + C = \sin^{-1} x + C$ .

註: 除非讀者直接記住基本公式  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$ . 否則上例中的變數變換, 是如何想到用  $\sin \theta$ ? 這跟上面所強調的變數變換法的精神 — 在於使根式內之式化成單項, 還是一致沒變的.

**例 3** 求不定積分  $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ . (把分母化成單項)

**解** 令分母  $1+x^2 = u$ , 則所予積分可化爲

$$\int \frac{du/2}{u} = \frac{\ln u}{2} + C = \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C.$$

**另解** (分母化成單項之另一想法) 令  $x = \tan u$ , 則分母變成單項  $1 + x^2 = \sec^2 u$ , 而所予不定積分可化為

$$\int \tan u du = \int \frac{-d \cos u}{\cos u} = \ln |\sec u| + C = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

**例 4** 求不定積分  $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ . (把分母化成單項)

**解** 令分母  $1 + x^2 = u$  時, 因被積分函數會殘留  $x$ , 無法消清成  $u$  之函數型, 故須改變想法. 茲令  $x = \tan \theta$  則所予積分可化為

$$\int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^2 \theta} = \int d\theta = \theta + C = \tan^{-1} x + C.$$

註: 本例有些讀者記性比較好, 直接由  $\tan^{-1} x$  之導數為  $\frac{1}{1+x^2}$  而得解本例.

**例 5** 試求  $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+4}}$  (把分母中較複雜的因子化成單項)

**解** 秉上述變數變換法之原則, 令  $2x + 4 = u^2$ , 則所予積分式可化成

$$\int \frac{2du}{u^2 - 4} = \frac{1}{2} \left[ \int \frac{du}{u-2} - \int \frac{du}{u+2} \right] = \frac{1}{2} [\ln |u-2| - \ln |u+2|] + C$$

代回  $u$  即完成積分, 為  $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{2x+4}+2} + C$ .

註: 讀者在國中階段學數學時常遭逢 '因式分解' 的困擾. 給兩多項式欲求彼等之乘積不難, 但反過來, 給予一多項式欲求其由哪些因式之乘積則會有難色. 須知這不是只是讀者個人的問題而已. 跟此情況類似, 在學習積分時亦碰到同樣困難, 須靠技巧來克服, 遂有 '積分技巧' 的引進.

#### 4° 數值積分法 (Numerical Integrations)

無法化成積分基本公式以求得其定積分者, 可採用此法求得其定積分之近似值. 由於定積分是一黎曼和極限值, 無法直接找到被積分之反導時, 可取其有限多項之和代替之. 須知有很多實函數很難找到它們的反導以初等函數 (Elementary Functions) 表示, 所以無法套用微積分基本定理找到它們對應的定積分. 數值積分法即為解決此困境而提出的對策. 由對應的黎曼和取有限多項亦可算是數值積分法之一, 包括所謂的中點法 (Midpoint Method). 另外, 比較有名的兩種數值積分方法分別叫做梯形法

(trapezoidal rule) 及拋物線法 (parabolic or Simpson's rule), 均分述如下. 其中均取有限等分割的項數來求得所預定積分之近似值, 而有限項之項數一般約取  $n = 4, 5, 6$  即可達到所欲精確地步.

### I. 中點法 (Midpoint Method)

當黎曼和中的諸  $c_i$  均分別改取子區間  $[x_{i-1}, x_i]$  之中點  $\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$  時即是本法.  
註: 改取中點之用意無非是讓誤差更小, 為折衷之計.

例 試利用中點法求定積分  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  之近似值, 當取  $n = 4$  時.

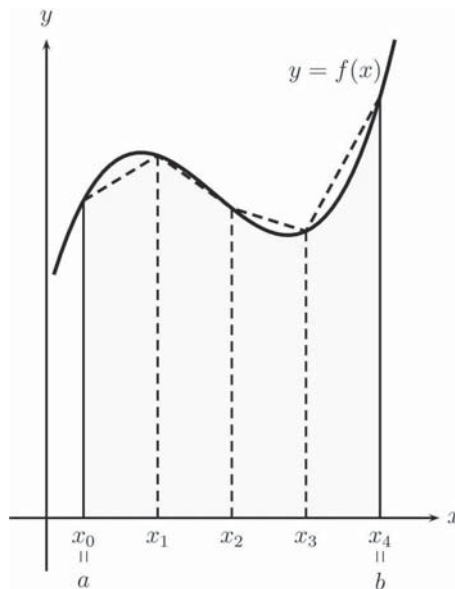
解  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \approx \frac{1-0}{4} \left( \frac{1}{1+(1/8)^2} + \frac{1}{1+(3/8)^2} + \frac{1}{1+(5/8)^2} + \frac{1}{1+(7/8)^2} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{64}{65} + \frac{64}{73} + \frac{64}{89} + \frac{64}{113} \right) \approx 0.7847.$

### II. 梯形法 (Trapezoidal Rule)

此法乃從黎曼和中所取之矩形面積改為梯形面積而得 (主要是讓誤差小些), 即以弦換弧而得的有限個梯形求其面積和即成. 有現成公式為:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(a) + 2f(a + \Delta x) + \cdots + f(a + (n-1)\Delta x) + f(b)]$$

其中  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  (參見附圖)



例 試利用梯形法則求定積分  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  之近似值, 當取  $n = 4$  時.

解 令  $f(x) = 1/(1+x^2)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ , 而  $n = 6$ . 諸  $x_0 = 0, x_k = k/6, k = 1, 2, \dots, 6$ . 由公式知

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &\approx \frac{1-0}{2 \cdot 6} [f(0) + 2f(1/6) + 2f(2/6) + 2f(3/6) + 2f(4/6) + 2f(5/6) + f(1)] \\ &\approx (0.82 + 0.162 + 0.15 + 0.133 + 0.115 + 0.098) \approx 0.783. \end{aligned}$$

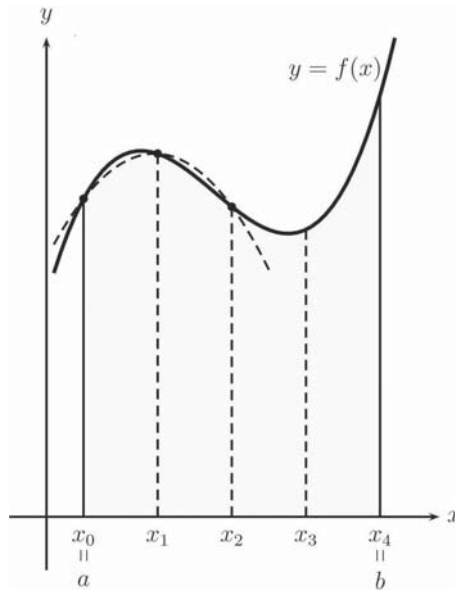
公式來由 由黎曼和當取  $n$  等分割時之矩形面積:  $f(k/n)(b-a)/n$  換成梯形面積:  $[f(k/n) + f((k+1)/n)]/2 \cdot (b-a)/n$  即得. (其中  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .)

### III. 拋物線法 (Parabolic Rule)

本法又稱 Simpson's Rule, 首由英人 Simpson 發現. 跟梯形法一樣, 不過在  $[a, b]$  上須取偶數個分割點 (其因是須每三個點組成一組決定唯一拋物線.) 以拋物線取代原曲線而算出對應的定積分. 其公式為:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3n} [f(a) + 4f(a + \Delta x) + 2f(a + 2\Delta x) + 4f(a + 3\Delta x) + \dots + f(b)],$$

其中  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . 另外, 上法中用到  $\int_{u-h}^{u+h} f(x) dx \approx \int_{u-h}^{u+h} (ax^2 + bx + c) dx = \frac{h}{3} [f(u-h) + 4f(u) + f(u+h)]$ , 其中  $h = x_{i+1} - x_i$  而  $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  為區間  $[a, b]$  上之任予分割. 意即要求的積分可以不用算積分, 代之以只須算該函數在各分點之值的適當組合即可. (參見附圖)



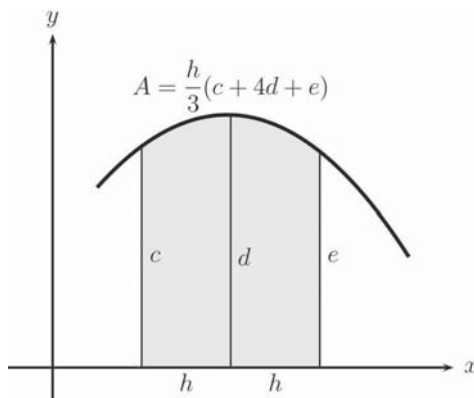
例 試利用拋物線法則求定積分  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$  之近似值, 當取  $n = 6$  時.

解 令  $f(x) = 1/(1+x^2)$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$ , 而  $n = 6$ . 諸  $x_0 = 0$ ,  $x_k = k/6$ ,  $k = 1, 2, \dots, 6$ . 由公式知

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &\approx \frac{1-0}{3 \cdot 6} [f(0) + 4f(1/6) + 2f(2/6) + 4f(3/6) + 2f(4/6) + 4f(5/6) + f(1)] \\ &\approx (0.056 + 0.216 + 0.100 + 0.177 + 0.077 + 0.131) \approx 0.785 \end{aligned}$$

註: 已知  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} 1 = \pi/4 = 0.785$ , 此與上兩法所求得做比較之效果相當不錯, 須知此處  $n$  只分別取 4, 6 而已.

公式來由 由黎曼和當取  $2n$  等分割時之相鄰兩矩形面積:  $f(a+k/n)(b-a)/n$  換成由三個所予曲線上之相鄰點所決定的拋物線 (會唯一確定因此三點不共一直線) 下之弓形面積:  $[f((k-1)/(2n)) + 4f(k/(2n)) + f((k+1)/(2n))]/3 \cdot (b-a)/2n (= \int_0^{2h} (px^2 + qx + r) dx)$  即得. 其中  $h = (b-a)/(2n)$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n-1$ , 而  $p, q, r$  由三點  $(-h, f(-h)), (0, f(0)), (h, f(h))$  確定. (參考附圖)



5°. 利用冪級數法: 詳見第七章第7.5節

例 求  $\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4} dx$  之值精確至小數第五位.

解 因  $\sqrt{1+x^4}$  之反導無法求得, 故只好改以冪級數法進行之. 已知  $(1+x^4)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^8 + \frac{1}{16}x^{12} - \frac{5}{128}x^{16} + \dots$  (屬二項級數), 可見

$$\int_0^{0.4} \sqrt{1+x^4} dx = \left[ x + \frac{x^5}{10} - \frac{x^9}{72} + \frac{x^{13}}{208} + \dots \right] \Big|_0^{0.4} \approx 0.40102.$$

## 6.4 有定積分之函數, 會具有什麼特性?

1°. 實函數的可積分性 (The Integrability of Real Functions)

**定理** 若  $f$  在  $[a, b]$  上連續時, 則其在  $[a, b]$  上的定積分必存在. 意即, 實函數之連續性蘊涵可積分性.

**定理證明** 主要是分割後的子閉區間內  $f$  的最大值與最小值之差 (此處用到函數的連續性) 可因子區間之長的很短並可使之小下來 (此處再用到函數的連續性) 而得使對應的由最大值與最小值所對應的黎曼和之差很小而得證. (細節就不再提供了).

註1: 實際上,  $f$  可在  $[a, b]$  上有界時, 允許可數個點 (denumerable points) 之不連續, 其所對應的定積分不受影響. (詳見高等微積分.) 意即上定理之逆未必成立.

註2: 實函數在某區間上的可積分性本是指函數所對應的黎曼和在分割夠細時有極限存在, 但它究竟是有什麼特性, 恐讀者還是摸不著頭緒吧? 它是由所予函數值乘上所屬自變數之變量的和的極限, 此極限有協調乘積之和的功能. 它應能呈現某一種所予函數與自變數之間的總協和量. 如  $f(x)$  表在  $x$  處之力時, 此總協和量就表物理上之做功 (work).

例1 求  $\int_{-1}^2 \frac{|x|}{x} dx$ .

解 首先要注意被積分函數在  $x = 0$  處沒定義, 它在該處不連續, 所以要算它的定積分就要先避開該點. 是以, 利用積分的可加性可得所予積分等於1.

$$\int_{-1}^2 \frac{|x|}{x} dx = \int_{-1}^0 (-1) dx + \int_0^2 (1) dx = -1 + 2 = 1.$$

例2 求  $\int_{-1}^2 \max\{2x - 1, 3 - 4x\} dx$ . ( $\max\{a, b\}$  表  $a, b$  中之選大者)

解 首先要注意被積分函數在  $x = 2/3$  處沒反導數, 它在該處呈現尖點, 所以要算它的定積分就要先避開該點. 是以, 利用積分的可加性可得所予積分等於  $20/9$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \max\{2x - 1, 3 - 4x\} dx &= \int_{-1}^{2/3} (3 - 4x) dx + \int_{2/3}^2 (2x - 1) dx \\ &= 2 - 8/9 + 3 - 2 = 19/9 + (4 - 2) - (4/9 - 2/3) \\ &= 20/9. \end{aligned}$$

例3 求  $\int_1^2 [x - 3] dx$ . (其中  $[ \bullet ]$  表高斯記號, 即  $[x] = n \Leftrightarrow n - 1 \leq x < n, n$  為整數)

解 首先要注意被積分函數可化簡為

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{當 } 3/2 \leq x < 2 \text{ 時} \\ -1, & \text{當 } 1 \leq x < 3/2 \text{ 時} \end{cases}$$

在  $x = 3/2$  處沒反導數, 它在該處不連續, 所以要算它的定積分就要先避開該點. 是以, 利用積分的可加性可得所予積分等於  $20/9$ .

$$\begin{aligned} \int_1^2 [2x - 3] dx &= \int_1^{3/2} (-1) dx + \int_{3/2}^2 (0) dx \\ &= -3/2 + 1 = -1/2. \end{aligned}$$

例4 求  $\int_{-2}^1 \frac{x^2-1}{x+1} dx$ .

解 首先要注意被積分函數在  $x = -1$  處沒定義, 它在該處不連續, 所以要算它的定積分就要先避開該點. 是以, 利用積分的可加性可得所予積分等於1.

$$\int_{-2}^1 \frac{x^2-1}{x+1} dx = \int_{-2}^{-1} (x-1) dx + \int_{-1}^1 (x-1) dx = -9/2.$$

註: 最後知結果是直接由直線形—三角形之面積求得. (因區域所圍之面積不因缺若干點而變.)

## 2°. 由定積分上限所定義之實函數—簡稱為定積分函數

設實函數  $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上可積分, 則對  $[a, b]$  上的每一  $x$  的定積分  $\int_a^x f(t) dt$  就稱為  $f(x)$  之由定積分上限所定義之函數. 讀者看到這種新函數, 可能會覺得怪怪的, 不太能適應. 其實它跟一般的實函數沒有兩樣, 只是一種新的用積分符號表出而已. 它的定義域仍為  $[a, b]$ . 對這種新函數我們一樣想探討它的連續性及可導性(見下欄).

**重要性質:** 設實函數  $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上可積分, 則新函數  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  必在  $[a, b]$  上連續.

證 設  $c$  為  $[a, b]$  上任予點, 則

$$\lim_{x \rightarrow c} |F(x) - F(c)| = \lim_{x \rightarrow c} \left| \int_a^x f(t) dt - \int_a^c f(t) dt \right| = \lim_{x \rightarrow c} \left| \int_c^x f(t) dt \right| \leq \lim_{x \rightarrow c} \int_c^x |f(t)| dt = 0.$$

其中須知, 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可積分, 則  $|f(x)|$  亦在同一區間上可積分. 得證.

註: 上性質不可直接由前示之微積分基本定理之 i) (參見 p.156) 得證, 因所予函數  $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上未必連續. 但由上限所定義之新函數  $\int_a^x f(t) dt$  仍可導,  $\forall x \in [a, b]$ , that is  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in [a, b]$ , 其證明如下所示.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x). \end{aligned}$$

其中用到定積分之退化情況  $\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(x)\Delta x$ , 當  $\Delta x$  足夠小時. (雖然  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x)\Delta x = 0$ , 但此 0 非真零. 此另請參見 p.106' 本章回顧' 之前段.) 在此請讀者

特別留意：定積分函數不但連續亦必可導之特性。這算是微積分基本定理的一種弱化，儘管所予函數  $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上未必連續。

### 3°. 平均值定理之積分型 (The Mean Value Theorem for Definite Integrals)

If  $f$  is continuous on  $[a, b]$ , then at some point  $c$  in  $[a, b]$ ,

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

The value  $f(c)$  is called the average (mean) value of  $f$  on  $[a, b]$ .

意即，若  $f$  在  $[a, b]$  上連續，則在  $[a, b]$  上有一點  $c$  所對應的函數值  $f(c)$  會等於  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上的平均值： $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ 。

註1：定積分型平均值定理實即微分型平均值定理，只是把其中的等式改爲積分型罷了（等於把函數都降低一階導數）。不過須注意的是，其中的  $c$  所屬之區間已從開區間改爲閉區間了。

註2：由定積分型平均值定理亦知定積分函數  $\int_a^x f(t) dt$  含有‘因式’ $(x-a)$ ， $\forall x \in [a, b]$ 。據此， $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上之反導函數  $\int_a^x f(t) dt \forall x \in [a, b]$  可解讀爲函數  $f(x)$  之‘被除’函數——以  $(x-a)$  爲除式， $f(x)$  爲商。

註3：當  $f(x)$  在  $[a, b]$  上都  $\geq 0$  時，讀者已知定積分  $\int_a^b f(x) dx$  表弓形面積，由此可解讀積分型中的  $f'(c)$  爲該弓形的平均高度。

**例1** 求函數  $f(x) = \sin x$  在區間  $[0, \pi]$  上的平均值，

**解** 由積分型平均值定理知  $f(x) = \sin x$  在  $[0, \pi]$  上的平均值爲

$$\frac{\int_0^\pi f(x) dx}{\pi - 0} = \frac{-\cos x \Big|_0^\pi}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

**例2** 求  $f(c)$  中的  $c$  值使它成爲函數  $f(x) = 1/\sqrt{x+1}$  在區間  $[0, 3]$  上的平均值，

**解** 所予函數顯然在  $[0, 3]$  上連續，故由積分型平均值定理知  $f(x) = 1/\sqrt{x+1}$  在  $[0, 3]$  上的平均值爲

$$f(c) = \frac{\int_0^3 f(x) dx}{3-0} = \frac{2\sqrt{x+1} \Big|_0^3}{3} = \frac{2}{3}.$$

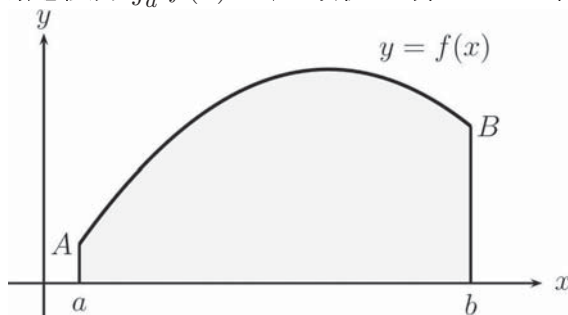
即  $1/\sqrt{c+1} = 2/3$ ,  $\therefore c = 5/4 \in [0, 3]$ .

## 6.5 相關題材

1°. 求各種測度

### I. 求曲線所圍成之弓形面積

設在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ , 則定積分  $\int_a^b f(x)dx$  表弓形區域  $aABb$  之面積。(見附圖)



[公式來由] 該弓形區域可視為由一些極細的矩形所圍成, 而矩形之面積以函數值  $f(x_k)$  為長; 以  $\Delta x_k$  為寬之乘積表示時, 這不是就是黎曼和中的各項嗎!

例1 試利用定積分證明半徑為  $r$  之圓的面積為  $\pi r^2$ .

證 欲利用定積分求弓形面積, 須先確定其中曲線所對應之函數. 已知圓所對應的函數以  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  為最簡單(由方程式  $x^2 + y^2 = r^2$  得.) 可見圓的面積等於  $\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$  的兩倍. 經變數變換(令  $x = r \sin \theta$ ) 後可化簡得為  $\pi r^2$ .

註1: 圓是人類最早碰到也是最完美的曲線. 其所圍的面積早在國小階段便被告知. 讀者一路走來, 試想想看, 它有沒有證過? 本來可藉定積分予以證明, 但偏偏所得到的積分不好積(如上示, 須用及反三角函數.) 所以一直延宕至今.

其中的原委乃在於定積分是以直線形去逼近曲線形的, 這當然難免有格格不入之處(以方制圓也.) 今若改以極座標來處理, 則有意想不到的簡單(因以圓制圓之故, 即只將其中的矩形改為扇形而已.) 如下示:

所予圓之面積 =  $\int_0^{2\pi} (1/2)r^2 d\theta = (1/2)r^2 \theta|_0^{2\pi} = \pi r^2$ , 其中  $(1/2)r^2 d\theta$  表圓心角為  $d\theta$ (須為弧度量) 之扇形的面積.

註2: 何以取矩形而不取梯形不是更接近弓形嗎? 一來不好算, 二來多此一舉, 沒什麼特別意義. 須知改梯形時多出來的面積屬二次誤差可忽略.

## II. 求直線形圍成之立體體積——薄片(slice)法

[公式]  $V = \int_a^b A(x)dx$ , 其中  $A(x)$  表欲求立體之切片(slice)面積.

[公式來由] 所予立體可視為由一些極細的相似切片所組成, 而切片之面積為  $A(x)$  當乘以厚度  $dx$  時即表切片的體, 在對這些體積累積起來便得所予立體之體積了.

例2 試求金字塔的體積.

解 金字塔就是三角稜, 亦稱正四面體, 即由四個正三角形圍成之立體, 它可視為由無數個相似正三角形之薄片堆積而成.

$$\therefore V = \int_0^h \left( \frac{\sqrt{3}(ax)^2}{4h^2} \right) dx = \frac{\sqrt{3}a^2h}{12},$$

其中  $a$  表金字塔的一邊長, 而其高為  $h = \frac{\sqrt{6}}{3}a$  亦為定值.

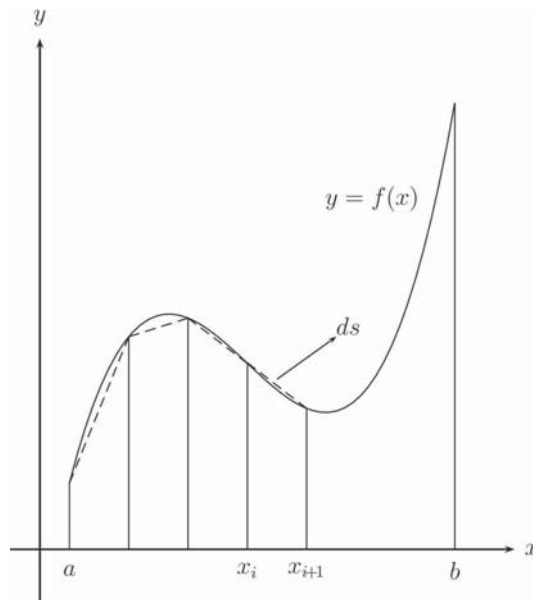
卡瓦利葉 (Cavalieri) 原理

若兩區域對在區間  $[a, b]$  上每一點  $x$  都有相同的高, 則兩區域具有相同的面積.

## III. 求曲線之長 (curves length)

設在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ , 則曲線  $y = f(x)$  所對應的曲線長

$$L = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$



註：爲使弧長公式中的定積分確有定義，長要求導函數  $\frac{dy}{dx}$  在區間  $[a, b]$  上連續。這也就說曲線  $y = f(x)$  在區間  $[a, b]$  上須爲平滑曲線。

[公式來由] 欲求之弧長可視爲由一些極短的弦所組成，而弦之長爲

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

將這些弦長累積起來便得所予曲線之弧長了。

**例 1** 試利用定積分證明半徑爲  $r$  之圓的周長爲  $2\pi r$ 。

**證** 欲利用定積分求圓周長，須先確定其中曲線所對應之函數。已知圓所對應的函數以  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  爲最簡單（由方程式  $x^2 + y^2 = r^2$  得。）可見圓的面積等於  $\int_{-r}^r 2(1 + (\sqrt{r^2 - x^2})^2)^{1/2} dx = 2r \sin^{-1} \frac{x}{r} \Big|_{-r}^r = 2\pi r$ 。

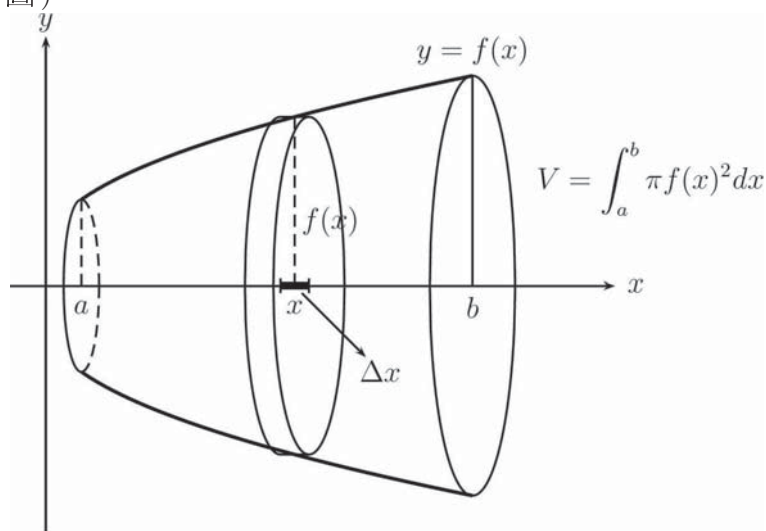
#### IV. 求迴轉體 (revolution) 之體積——圓盤 (disk) 法及圓殼 (shell) 法

設在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ ，則

i) 區域  $f(x)$  下  $[a, b]$  上對  $x$  軸迴轉所得的迴轉體的體積爲

$$\int_a^b \pi f(x)^2 dx$$

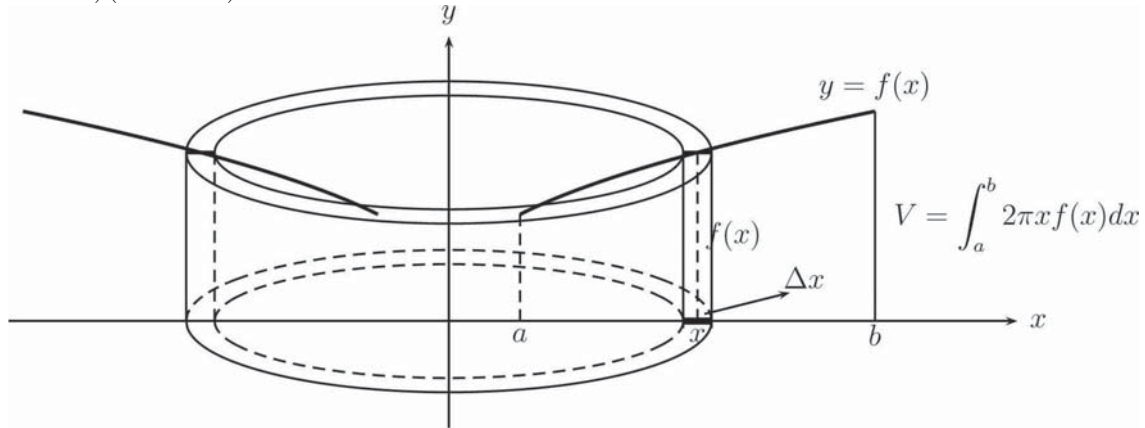
(圓盤法)(見附圖)



ii) 區域  $f(x)$  下  $[a, b]$  上對  $y$  軸迴轉所得的迴轉體的體積為

$$\int_a^b 2\pi x f(x) dx.$$

(圓殼法)(見附圖)



[公式來由] 所予迴轉體可視為曲線上由一些極薄的圓盤(disk)所組成,而圓盤之面積為  $\pi f(x)^2$  當乘以厚度  $dx$  時即表圓盤的體積,再對這些圓盤體積累積便得所予迴轉體之體積了.圓殼法同理可得.

**例1** 試利用迴轉體的原理求半徑為  $r$  之球體的體積.

**解** 半徑為  $r$  之球體可視為由半徑  $r$  之圓  $x^2 + y^2 = r^2$  對著  $x$  軸迴轉而成的迴轉體.故由迴轉體之體積求法得

$$V = \int_{-r}^r \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx = \pi(r^2 x - x^3/3)|_{-r}^r = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

**例2** 試求錨環(torus,像救生圈者)之體積.

**解** 錨環可視為由圓  $x^2 + (y - 2r)^2 = r^2$  對著  $x$  軸迴轉而成的迴轉體.故由迴轉體之體積求法得

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r \pi[(r + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (r - \sqrt{r^2 - x^2})^2] dx \\ &= 4\pi \int_{-r}^r r\sqrt{r^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^3(1 + \cos 2\theta)d\theta \text{ (其中令 } x = r \sin \theta) \\
&= 2r^3\pi(\theta + \sin 2\theta/2) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2r^3\pi^2
\end{aligned}$$

### V. 求迴轉面之表面積 (surface area)

設在  $[a, b]$  上  $f(x) \geq 0$ , 則

i) 曲線  $y = f(x)$  對  $x$  軸迴轉所得的迴轉面的表面積為

$$\int_a^b 2\pi f(x) ds,$$

其中  $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$  (請參見上頁附圖). 上式表對弧長的積分.

ii) 曲線  $y = f(x)$  對  $y$  軸迴轉所得的迴轉面的表面積為

$$\int_a^b 2\pi x ds,$$

其中  $ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$  (請參見上頁附圖). 上式表對弧長的積分.

[公式來由] 所予迴轉面可視為曲線上由一些極短的弦對  $x$  軸或  $y$  軸迴轉而成, 這些弦所迴轉的表面積為  $2\pi f(x)$  乘以厚度  $dx$ , 再對這些面積累積便得所予迴轉面的表面積了.

**例 1** 試利用迴轉面的原理求半徑為  $r$  之球面的表面積.

**解** 半徑為  $r$  之球面可視為由半徑  $r$  之圓  $x^2 + y^2 = r^2$  對著  $x$  軸迴轉而成的迴轉面. 故由迴轉面之表面積求法得

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-r}^r 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_{-r}^r 2\pi y \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{r^2 - x^2}} dx \\
&= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi r x \Big|_{-r}^r = 4\pi r^2.
\end{aligned}$$

**例 2** 試求錨環 (torus) 之表面積.

解 錨環的表面可視為由圓  $x^2 + (y - 2r)^2 = r^2$  對著  $x$  軸迴轉而成的迴轉表面. 故由迴轉面之表面積求法得

$$\begin{aligned} S &= \int_{-r}^r [2\pi(2r + \sqrt{r^2 - x^2}) + 2\pi(2r - \sqrt{r^2 - x^2})] \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= 8r^2\pi \int_{-r}^r \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right) dx \\ &= 8r^2\pi \sin^{-1} \frac{x}{r} \Big|_{-r}^r = 8\pi^2 r^2 = (2r\pi)(2(2r)\pi). \end{aligned}$$

註: 錨環之表面積為其迴轉圓之周長 ( $= 2r\pi$ ) 與迴轉圓之圓心所迴轉之軌跡 (亦為一圓) 之長 ( $= 2(2r)\pi$ ) 的乘積.

## 2°. 瑕積分或非正式積分 (Improper Integrals)

在理論上, 如本章一開始定義的積分應稱為正式積分 (Proper Integrals), 只是常簡稱為積分罷了. 在實用上, 所遇到的情況常不合乎正式積分之情況, 為此, 常須將正式積分推廣. 此即瑕積分之由來.

瑕積分分兩型:

第一型: 當正式積分  $\int_a^b f(x)dx$  中的上下限  $a, b$  由須為定數改為可為  $\pm\infty$  之一時.

第二型: 當正式積分  $\int_a^b f(x)dx$  中的被積分函數  $f(x)$  本在  $[a, b]$  上是有界的 (bounded) 而改為無界的 (unbounded), 即  $f(x)$  可出現  $\pm\infty$  之一時.

當為第一型瑕積分時: 數學上的處理方式為先把其中的  $\pm\infty$  改為定數, 亦即改為正式積分來處理, 隨後再透過極限讓改為定數的上下限之一趨近無限大. 若趨近無限大後的正式積分有極限, 則稱所予瑕積分收斂或有意義, 否則就是發散或無意義. 以式子表示時為:

$$\int_a^\infty f(x)dx \triangleq \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx.$$

或

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \triangleq \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

註: 此情況之瑕積分若收斂, 則所予函數  $f(x)$  必趨于 0 當  $x \rightarrow \infty$  時.

當為第二型瑕積分時：數學上的處理方式為先把  $f(x)$  中會出現  $\pm\infty$  之處找出來，譬如  $c$ ，則在  $[a, b]$  上暫時避開  $c$  點，即改為兩個正式積分來處理，即  $\int_a^{c^-} f(x)dx + \int_{c^+}^b f(x)dx$ 。亦即當  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \pm\infty$  時，

$$\int_a^b f(x)dx \triangleq \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \rightarrow c^+} \int_t^b f(x)dx$$

若右側兩極限存在，則稱所予瑕積分收斂，否則就是發散（即其中有一沒極限時）。

註1：須知如定積分  $\int_{-2}^3 \frac{x^2-1}{x-1} dx$  就不算是瑕積分，雖所予被積分函數在  $x=1$  處沒定義，但不屬於會是  $\pm\infty$  型。（餘參見 p.175 例4.）

註2：讀者請回憶一下定積分的定義：即黎曼和  $\sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x_i$  的極限（當  $n \rightarrow \infty$  且  $|\Delta x_i| \rightarrow 0$  時，）其中  $\Delta x_i$  為區間  $[a, b]$  上任予分割  $\{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$  所對應的子區間  $[x_{i-1}, x_i]$  長，而  $x_i^*$  為該區間上之任予點。欲使此極限存在， $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上有定義外，須有界（bounded）（因如此之下， $f(x_i)\Delta x_i$  才會趨於0，所對應的黎曼和才會有極限存在。）可是在實用的情況裡， $f(x)$  未必有界，且區間  $[a, b]$  也未必是閉區間時，是不是定積分就派不上用場了！此所以有引進瑕積分之必要。

例1 試判定瑕積分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  之斂散性。

解 所予積分屬第一型瑕積分，故由定義知  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1} x \Big|_0^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \tan^{-1} t = \pi/2$ 。可見所予積分收斂。

例2 試判定瑕積分  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx$  之斂散性。

解 所予積分屬第二型瑕積分，故由定義知  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = \lim_{t \rightarrow 2^-} -\sqrt{4-x^2} \Big|_0^t = 2$ 。可見所予瑕積分收斂。

例3 試判定瑕積分  $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$  之斂散性。

解 所予積分屬第一型瑕積分，由定義知

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx &\triangleq \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx + \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx \\ &= (-e^{-x^2}/2) \Big|_{-\infty}^0 + (-e^{-x^2}/2) \Big|_0^{\infty} = -1/2 + 1/2 = 0 \end{aligned}$$

可見所予瑕積分為收斂。

註：請特別注意，碰到瑕積分屬  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$  型時，不可直接定義成  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-t}^t f(x)dx$  就進行積分，一定得拆開成兩部分如上所示（其中 0 可改為任何定數），其因是瑕積分中的上下限  $\pm\infty$  未必屬同一等級（即趨近無限大的速度未必一致。）

### 瑕積分斂散性的比較檢定法

假設  $f$  與  $g$  為連續函數且  $f(x) \geq g(x)$ ，對  $x \geq a$ 。

a) 若瑕積分  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  收斂，則瑕積分  $\int_a^{\infty} g(x)dx$  亦收斂。

b) 若瑕積分  $\int_a^{\infty} g(x)dx$  發散，則瑕積分  $\int_a^{\infty} f(x)dx$  亦發散。

註：本比較法跟極限之夾擊法之用意有點相像。（請參考下面諸例。）

證 略（讀者請用面積之大小比較來瞭解。）

註：此比較法使用之關鍵在如何找到適當的函數來做為  $f$  或  $g$  之一，這是須要多學習之處。（請參考下面諸例。）

例 1 試證  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  收斂。

解 須知所予積分無法直接求其積分，故須另謀他途。將所予積分改表成

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$$

其中前者為一正常積分（因  $e^{-x^2}$  為連續函數），後者則是瑕積分，由於  $e^{-x} \geq e^{-x^2}$ ，當  $x \geq 1$  時，而  $e^{-x}$  則很好積分。

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx = e^{-1}$$

可見當  $f(x) = e^{-x^2}$ ， $g(x) = e^{-x}$  時，由上示檢定法則知所予瑕積分  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  收斂。證畢。

例 2 試證  $\int_1^{\infty} \frac{1+e^x}{x} dx$  發散。

解 須知所予積分無法直接求其積分，故須另謀他途。

由於

$$\frac{1+e^x}{x} > \frac{1}{x}$$

且  $\int_1^{\infty} 1/x dx = \ln x|_1^{\infty} = \infty$ 。可見由比較檢定法知所予瑕積分發散。

註：請注意，此例中之被積分函數  $f(x) \not\rightarrow 0$ ，as  $\rightarrow 0$ 。故必發散。

## 3° Riemann-Stieltjes 積分

Riemann-Stieltjes 積分是 Riemann 積分的延伸. 它在諸多地方用到, 如求弧長時. 它也是線積分 (Line Integral) 的一種, 如求做功的物理問題. 其定義為:

設  $f, g$  為定義在  $[a, b]$  上的兩函數, 對  $[a, b]$  的任予分割  $P$  而言, 考慮所對應的黎曼和

$$\sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

的極限, (若存在當  $|P| \rightarrow 0$  時), 則稱此極限為 Riemann-Stieltjes 積分, 此積分就以  $\int_a^b f(x)dg(x)$  表示.

**例 1** 當  $g(x) = x$  時, Riemann-Stieltjes 積分就是 Riemann 積分.

**例 2** 當  $f(x) = 1$  時, Riemann-Stieltjes 積分可看成  $g(x)$  微分的積分, 即

$$\int_a^b 1 \cdot dg(x) = g(b) - g(a).$$

須知此時的  $g(x)$  不必須要連續, 可專門處理有關高斯函數的積分問題. (請見例 3 p.174)

**例 3** 當  $g(x) = k$  時 (其中  $k$  為常數), Riemann-Stieltjes 積分就等於 0. 蓋  $g(x_i) - g(x_{i-1}) = 0 \forall$  分割  $P$ . 故得  $\int_a^b f(x)dg(x) = 0$ .

## 4° 無窮級數的斂散性

黎曼和之極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x_k$  中, 當  $\Delta x_k = 1$  時 (此時對應的區間為  $a = 0, b = \infty$ ), 其型便很像某無窮級數首  $n$  項和之極限. 此亦可視為第三型之瑕積分. 有此認識之下, 本欄試著用瑕積分斂散性的概念來探討無窮級數的斂散性. 斂散性可視為局部性的一種 (因屬單側極限之一), 故前此所學的極限概念可派上用場. 首先認識一下無窮級數.

## 認識無窮級數

由數列  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ , 考慮其首  $n$  項的和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

所成的新數列  $\{S_n\}$  稱之為由數列  $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$  所對應的級數, 這種級數常以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  表之. 例如, 由數列  $\{1/k\}_{k=1}^{\infty}$  所對應的級數, 便是  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ .

由於數列可視為某實函數  $f(x)$  在自然數集合  $\mathbb{N}$  對應值組成, 再由上述知級數亦可由此推知某函數對應到自然數的首  $n$  項組成. 可見其斂散性亦可透過瑕積分之斂散性斷定之. 本書就一改傳統方式, 以瑕積分來認識無窮級數之種種性質.

### 實無窮級數之收斂

本節乃延續數列之收斂 (見第四章) 而來. 設  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  為一實級數, (其中  $a_k \in \mathbb{R}, k = 0, 1, 2, \dots$ ) 則其首  $n+1$  項之和  $\sum_{k=0}^n a_k$  稱為所予無窮級數之部分和 (partial sum), 以  $S_{n+1}$  表之. 由  $S_n$  所組成的數列,  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ , 若收斂至  $S$ , 則稱無窮級數  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  收斂 (Convergence of Real Infinite Series), 並稱  $S$  為和. 為方便計, 無窮級數常簡以  $\sum a_k$  表之.

讀者直觀地想一下, 要  $S_n$  會趨近某定數, 則它每次再添加的一項 (可能是負的) 必須越來越小才能達成. 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  的先決條件亦即充分條件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 注意, 但逆命題不成立, 例如調和級數  $\sum 1/n$  發散, 雖  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ . (詳見下面例 3) 可見  $S_n$  要趨近某定數時, 其後面再添加的不管多少項都無法撼動該定數之大小之意.

**例 1** 令  $a_k = r^k$ , 問級數  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  何時收斂? 若收斂, 試求其和.

**解** 此為一標準無窮等比級數, 以  $r$  為公比. 由國中數學知, 當公比  $-1 < r < 1$  時, 所予級數收斂, 且其和為  $\frac{1}{1-r}$ . (因所予級數之首  $n$  項之和  $S_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r} \rightarrow S$ , 當  $n \rightarrow \infty$  時.) (請再參考例 3p.99.)

註:  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  習慣上以  $a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots$  表示. 這常讓初學者誤解是無數個實數相加. 須知無數個實數相加是無意義的 (因加法只對有限個才有定義.) 所以級數中的加號並無相加的意義, 為此才須取 (有限多項之) 部分和的極限來做其斂散性的判定.

**例 2** 令  $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ , 問級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  何時收斂? 若收斂, 試求其和.

**解** 本例屬所謂對消型級數 (telescoping series) 的一種, 算是能算出其和的級數. 其一般項為

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

而其首  $n$  項之和經對消後為

$$S_n = 1 - \frac{1}{n}$$

因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1,$$

故所予級數收斂且其和為  $S = 1$ .

**例3** 令  $a_n = \frac{1}{n}$ , 問級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  何以發散?

**解** 本例屬最簡單的調和級數. 其一般項為  $\frac{1}{n}$ , 而其首  $n$  項之和

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

無法進一步化簡. 但因其後的  $n$  項之和

$$\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

不會任予小. 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  不會趨近定數. 故所予級數發散.

註1: 調和級數  $\sum \frac{1}{n}$  是常令讀者誤解其為收斂的一例. 雖它的末項趨近於零, 但須知它趨近於零的速度不夠快, 所以最後當項數越多項時, 就不會任予小. 在談有關級數的收斂的問題時, 稍注意一下趨近於零的快慢, 可能比較有 feeling.

註2: 另外由  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \approx \ln n$  (由  $\ln x$  所對應之黎曼和易知) 亦可驗證上結果.

**例4** 令  $a_n = \frac{1}{n^2}$ , 問級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  何以收斂?

**解** 本例屬所謂  $p$ -級數 (p-series)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  的一種. 其一般項可改為

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, n \geq 2.$$

右側可對消因而得知所予級數之收斂性.

由於其首  $n$  項之和經對消後為  $S_n < 2 - \frac{1}{n}$ , 因此  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \leq 2$ , 故所予級數收斂 (因所予級數之首  $n$  項之和遞增且上方有界).

註: 一般而言,  $p$ -級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  收斂當  $p > 1$  時; 發散當  $p \leq 1$  時. 詳見本節末 (p.191) 之定積分檢定法)

無窮級數之收斂檢定法

除非很特殊的無窮級數(如等比級數或對消型級數),要算出所予級數的和(若存在時)殊屬不易.爲此,欲從求和來決定級數的斂散性,亦恐難如願.在數學上常退而求其次,在無法求其和之下,大都依靠如何仍能判定所予級數是收斂的檢定法來進行.(還是老觀念:透過已知收斂的級數來探求所予級數之收斂性.)數學上有各式各樣的檢定法,不勝枚舉.本書僅提出最有用的利用到極限的極限比較法及比值檢定法,如下所示.

### 極限比較檢定法(Limit Comparison Test)

透過已知收斂或發散的級數斷定所予級數之斂散性是謂比較法.

有了數列收斂的概念後,透過極限的概念,級數之是否收斂就多了一些檢定法.意即不用再一項一項的比較,可以以集團的方式做比較,這樣是不是方便不少?

#### 定理—極限比較檢定法

Suppose that  $a_n \geq 0, b_n > 0$  and

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

If  $0 < L < \infty$ , then  $\sum a_n$  and  $\sum b_n$  converge or diverge together. If  $L = 0$  and  $\sum b_n$  converges, then  $\sum a_n$  converges. Finally, if  $L = \infty$  and  $\sum a_n$  converges, then  $\sum b_n$  converges

意即,欲知正項級數  $\sum a_n$  是否收斂,可設法找一已知收斂或發散的正項級數  $\sum b_n$  來做比較:若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L (\text{其中 } 0 < L < \infty),$$

則兩級數同時收斂或發散.若  $L = 0$ ,則級數  $\sum a_n$  收斂當已知級數  $\sum b_n$  收斂時.當  $L = \infty$  且  $\sum a_n$  收斂時,則  $\sum b_n$  亦收斂.

**本檢定法證明** 主要關鍵在於  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$  所代表之意義,亦即極限的意涵.記住,它代表當  $n$  足夠大時,級數對應的一般項之比約略是一常數  $L$  之意.今若已知其中之一收斂時,另一級數顯然也會收斂,(因前者有和了,乘以  $L$  倍仍有和的存在,)只要  $L$  不要等於  $0$  或  $\infty$ .

當  $L = 0$  時,表  $a_n$  比起  $b_n$  要快趨近于  $0$  之意,可見只要級數  $\sum b_n$  收斂,級數  $\sum a_n$  亦收斂(因後者之部分和必存在).

至於當  $L = \infty$  時,表  $b_n$  比起  $a_n$  要快趨近于  $0$  之意,可見只要級數  $\sum a_n$  收斂,級數  $\sum b_n$  更快收斂.(此情況可改成  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 0$  並比照  $L = 0$  來設想.)

問題是,如何找適當的已知收斂與否的級數來做比較?一般是取所謂的p-級數  $\sum 1/n^p$  (詳見下例) 當做  $\sum b_n$  來做檢定法的比較.

**例1** 試斷定級數  $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$  收斂還是發散?

**解** 須知當  $n$  很大時,  $19n$  比起  $n^2$  應知小很多,故可忽略掉.由此可得知級數  $\sum 1/n$  可做為極限比較法中的被比較的級數.由於

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

故由極限比較法知級數  $\sum \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$  發散.(因  $\sum \frac{1}{n}$  發散.)

註:似此例,當  $n$  大時,一般項中哪些是主項哪些是副項稍作區分,把副項的去除掉,就可約略判定所予級數是收斂還是發散.(請跟p-級數做比較.)

**例2** 試斷定級數  $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2-9n}$  收斂還是發散?

**解** 須知當  $n$  很大時,同上例  $9n$  比起  $n^2$  應知小很多,故可忽略掉;同樣的,分子中的  $+1$  也可忽略.由此可得知級數  $\sum 1/n^{3/2}$  可做為極限比較法中的被比較的級數.由於

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{2n+1}}{n^2-9n}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \sqrt{2}.$$

故由極限比較法知所予級數  $\sum \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2-9n}$  收斂.(因  $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$  由p-級數知收斂.)

### 交錯級數檢定法

級數  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ , 其中  $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ , 稱為交錯級數 (Alternating series). 當

i) 數列  $a_n$  遞減;

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  時,

交錯級數  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ , 收斂.

**本檢定法證明** 考慮首  $n$  項和  $S_n$ , 易知  $S_{2n-1} > S_{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_{2n} - S_{2n-1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 0$ . 可見  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  存在, 亦即所予交錯級數收斂.

註:上檢定法中的 i) 與 ii) 屬充分但非必要條件, 如級數  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ , 其中  $a_{2n} = 3^{-n}; a_{2n-1} = 2^{-n}$ , 則顯然收斂 (由等比級數得知), 但 i) 不合.

例 級數  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$  為收斂。(因合乎上列充分條件 i) 及 ii.)

### 比值檢定法 (The Ratio Test)

前示的極限比較法須靠另一級數來做比較。一般而言，須借助他人，總是欠人情，能免則免，是不？比值檢定法則靠自己，這是跟前者不一樣的地方，如下示：

Let  $\sum a_k$  be a series with non-zero terms. If

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L (\text{定數}),$$

then,

(a) the series *absolutely converges* provided  $L < 1$ ,

(b) the series *diverges* provided  $L > 1$ , 或  $L = \infty$ .

(c) the series *inconclusive* provided  $L = 1$ .

意即，令  $\sum a_k$  為非零項級數（各項可正可負之意）。若

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L,$$

則下列敘述成立：

(a) 只要  $L < 1$ ，所予級數絕對收斂，

(b) 只要  $L > 1$ ，或  $L = \infty$  所予級數發散，

(c) 只要  $L = 1$ ，所予級數無法判定收斂或發散，即本檢定法失效。

註1：讀者已知等比級數很特殊，具有相鄰兩項之比（即公比）恆為定值，它會收斂的充要條件是公比的絕對值小於1。上檢定法就是透過極限的特性——去蕪存菁，找到近乎等比級數的性質，用來輔助決定一般級數的斂散性。（既特殊化又一般化。）

註2：什麼叫做絕對收斂？一級數，其各項未必都正項，但當各項均取絕對值後所成的級數若收斂，則稱原級數絕對收斂。一級數若絕對收斂則亦必收斂。

### 何以絕對收斂必（一般）收斂？

設級數  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  中各項有正有負但未必正負相間，欲知其斂散性常先對各項取絕對值變成正項級數來處理，因正項比較有檢定法來斷定其斂散性，然後再透過絕對收斂必收斂而得知其斂散性。

證令  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ，而  $T_n = \sum_{k=1}^n |a_k|$ 。已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$  存在（因絕對收斂），由於  $S_n + T_n \leq 2T_n$ 。可見  $\{S_n + T_n\}$  屬正項數列又有界，故  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + T_n)$  存在。因  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + T_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ ，此即得證所予級數收斂。

例 利用 Ratio Test 決定級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{100}}$  之斂散性.

解

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{100}}}{\frac{n!}{n^{100}}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{100} = \infty. \end{aligned}$$

可見依據比值檢定法得所予級數發散.

證明要訣：須知極限的用處在只注重無窮多項(即有集團之意),不受有限項的干擾.另外,讀者應知級數的斂散性與有限項無關,意即無窮級數之收斂與否不因有限項之併入或踢除而改變(但其和可能受影響).

### 比值檢定法之證明

$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \rho$  (定數) 表從某一項後,所予級數之後前項之比接近常數,亦即所予級數幾乎是等比級數.可見除有限項外,所予級數可當成等比級數來處理.故當公比  $\rho < 1$  時,所予級數絕對收斂;當公比  $\rho > 1$  或  $\rho = \infty$  時,所予級數發散;至於公比  $\rho = 1$  時,由於所予級數不是真正的等比級數,故不能斷定所予級數一定發散.此情況須靠其他方法進行,沒有一定規則可循.

註1: 當所予級數非正項時,則諸項取絕對值後上檢定法亦適用,只是收斂時須改成絕對收斂就是了.

註2: 另有一跟比值檢定法很類似的檢定法叫根值檢定法 (Root Test),它也是依據等比級數的原理而得. 設

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \text{ 定值,}$$

則可得跟比值檢定法一樣的結論.

### 實級數之積分檢定法 (Integral Test for Real Series)——暇積分之應用

定積分之另一用處就是輔助一般實級數的斂散性的檢定.讀者已知定積分是對應函數在所予區間上作黎曼和之極限,此黎曼和之極限看起來不就是級數的樣型 (patterns) 嗎?

### 積分檢定法

Let  $f$  be a continuous, positive, non-increasing function on interval  $[1, \infty)$  and suppose that  $a_k = f(k)$  for all positive integers  $k$ . Then the infinite series

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

converges if and only if the improper integral

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

converges.

意即, 設  $f$  在區間  $[1, \infty)$  上為連續, 正的, 非遞增函數且假設對所有正整數  $k$ ,  $a_k = f(k)$  則級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

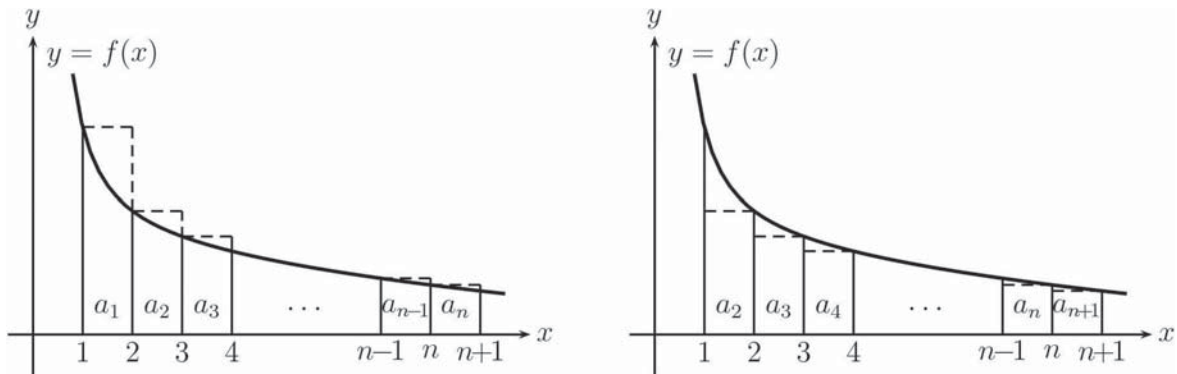
收斂的充要條件為暇積分

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

也收斂.

積分檢定法之證明 主要在建立下示不等式

$$\int_2^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n a_k \leq \int_1^n f(x) dx.$$



由附圖不難解讀上不等式成立. 由此不等式知所予級數之部分和屬有界遞增, 故當對應之暇積分收斂時, 它亦收斂.

**例 1** 問級數  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$  是收斂還是發散? 其中  $p$  為與  $n$  無關之定實數.

**解** 利用積分檢定法知此時  $f(n) = 1/n^p$  而瑕積分

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty} dx/x^p = \begin{cases} x^{1-p} |_1^{\infty} & \text{當 } p \neq 1 \text{ 時} \\ \ln x |_1^{\infty} & \text{當 } p = 1 \text{ 時} \end{cases}$$

可見當  $p \leq 1$  時發散; 當  $p > 1$  時收斂. 故由積分檢定法知所予級數當  $p \leq 1$  時發散; 當  $p > 1$  時收斂.

**例 2** 問級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$  是收斂還是發散?

**解** 此時  $f(n) = \frac{1}{n^{1+1/n}}$ , 很多讀者會認為對應的級數收斂 (因  $p = 1 + 1/n > 1$ ). 須知此時  $p$  不是定數, 所以不能利用  $p$ -級數斷定所予級數收斂. 實際上, 由極限比較法 (limit comparison test):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{-(1+1/n)}}{n^{-1}} = 1, \text{ 尾端行徑之概念}$$

得知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+1/n}}$  發散 (因  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$  發散.)

**例 3** 問級數  $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n(\ln n)^p$  是收斂還是發散? 其中  $p$  為與  $n$  無關之定數.

**解** 此時  $f(n) = 1/n(\ln n)^p$ , 很多讀者會認為對應的級數收斂 (因  $n(\ln n)^p$  總比  $n$  之一次方大一些). 須知此時因  $\ln n$  幾乎沒次方可言, 所以不能利用  $p$ -級數斷定所予級數收斂. 實際上, 直接利用定積分檢定法即可:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \text{ 與 } \int_2^{\infty} \frac{1}{(x \ln x)^p} dx \text{ 同步.}$$

由瑕積分知當  $p \leq 1$  時, 所予積分發散; 當  $p > 1$  收斂. 故得所予級數當  $p > 1$  時收斂.

註: 瑕積分之下限換取 2, 主要在防被積分函數沒定義. 須知級數之斂散性不受有限項之去留而影響.

**例 4** 試斷定級數  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^4}$  是收斂還是發散?

**解** 所予級數可視為由實函數  $f(x) = \frac{1}{(\ln x)^4}$  所對應者. 茲因  $\int_b^{\infty} f(x)dx > \int_b^{\infty} (1/x^{1/2})dx$  (其中  $b$  為適當大的正實數). 可見所予級數發散. (因  $\int_b^{\infty} (1/x^{1/2})dx$  發散.)

註: 上解中利用到不等關係:  $\ln x < x^\alpha$ , 其中  $x$  須足夠大之正數, 而  $\alpha$  為任予正實數. (詳見 p.139 註 2.)

## 6.6 本章統合

本章定義了實函數的定積分，它是對自變數作分割所對應的一種所謂黎曼和的極限。屬協和極限。它未必存在，一旦存在，便稱該極限為函數在該區間上之定積分。有了定積分的概念後，就可以知悉該實函數的一些特性，如可積分性、均勻性、協和性等等，分述如下。

i) 可積分性 (integrability): 亦即協和極限的存在性。須知所予函數在某點的協和極限未必存在。一旦存在時，則可引發該函數諸多其他特性如下所示，故以可積分性稱呼之，以方便後面的討論。

ii) 協和性 (homogeneity): 若  $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上可積分時，亦即  $\int_a^b f(x)dx$  存在時，此定積分有均勻性的意味。

iii) 級數之斂散性 (Convergence of Series): 由瑕積分之斂散性可判定對應無窮級數之斂散性，它們之間具同步之效應。

求定積分就是一種反除法——定積分怎麼想出來的？

當可微分之實函數  $f(x)$  給予時，由相對極限法可求得其導數  $f'(x)$ 。反之，若給予  $f'(x)$ ，則由找反導的方法可找到原函數  $f(x)$ 。定積分則可解讀為另一種找反導的方法，它亦可視為由‘商’反求被‘除’函數來思考。說明如下。

由前知，導數之平均值定理可視為函數的剩餘定理，以  $f'(c)$  為‘商’。即  $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$ ，其中  $c$  介於  $x$  與  $a$  之間。本由此亦可求得被‘除’式  $f(x)$ 。照理，‘被除’函數  $f(x)$  可逕由前等式求得。但因  $c$  不好求，故恐難如願。為此，只好改弦易轍。今將區間  $[a, b]$  加以分割時，對各子區間，利用平均值定理可得下列諸等式：

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n.$$

其中  $\{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$  為  $[a, b]$  上之分割。將這些等式各邊相加(左側互相對消)可得  $f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^n f'(c_i)\Delta x_i$ 。此等式之右側即為所予函數之導函數在  $[a, b]$  上所對應的黎曼和，其極限(當分割夠細時)亦即本書所稱之協和極限(定積分)。左側則可視為‘被除式’的總和，不受取極限的影響。

請注意，取極限有一好處，可使諸  $c_i$  均趨近  $x_{i-1}$ ，可不必一一去求諸  $c_i$  之確值，省去很多計算上的麻煩。這不是又是去蕪存精之又一例嗎！?

以上所談的函數  $f(x)$  須在所予區間上可微分函數時(因須用到平均值定理)。當  $f(x)$  不具可微分性時，上面所列的結論是否就失效？不會的，只是無法套用平均值

定理而已. 甚至當  $f(x)$  不連續時, 只要在所考慮之區間上可積分, 一樣可考慮極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ , 可見上述結論仍一樣成立. 惟此時之定積分便應稱為  $f(x)$  所對應之某'被除式'的差值.(即有適當之函數  $F$  使  $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ ) 可見當所予函數之反導不存在時, 其對的定積分可解讀成被'除'函數之一值.

註: 上列的敘述過程中讀者恐有若干疑慮. 茲再一一說明於下.

i) 為何會想到將區間  $[a, b]$  分割成小區間? 取其對應函數差時是不是比較能夠看出函數變化的情形?

ii) 取其中各等式之和(共  $n$  個)有何特別用意? 由相鄰之小差的累積是不是比較能顯現函數的變化原委? 另外取  $n$  項之和也有'昇冪'的附帶作用.(餘見下面之註.)

iii) 取無窮項之和若存在, 則此和可形成一新的量或函數(如 FTC 之(i)所述), 不會因分割所予區間之不同而改變其值.

以上都是定積分為何取黎曼和之極限的用意所在. 因屬無窮項之和, 故或多或少若干有限項不會影響極限的存在(但會影響整個和).

總之, 由'商式'反求'被除'函數的方法就是定積分的另一種解讀. 再依微積分基本定理 i) 知該'被除'函數為可微分函數, 且其導數為其'商式'.

另外, 協和就是有集'局部性'成全'全體性'之意.

註: 級數之和與其諸項之間, 不僅僅只是量會改變, 其實質也會改變. 所謂質的改變是指當諸項有次方可言時, 取其  $n$  項之和便有使次方昇高一次的作用在. 如等式  $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$  中左側諸項屬一次, 右側表級數之和, 則屬二次. 定積分取黎曼和的極限, 由此可知有昇冪之作用——是不是頗具被除函數身份的意味?

### 協和極限之另一解讀

由基本定理得

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx,$$

當兩邊除以  $b - a$  時得

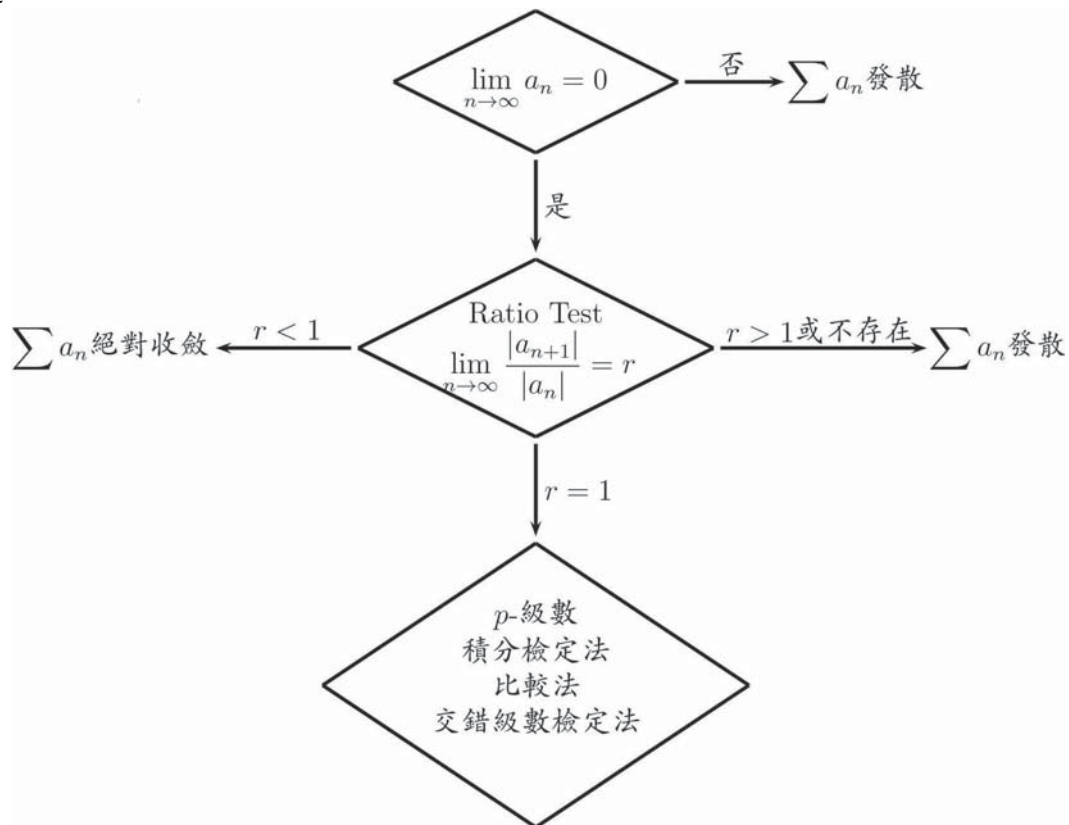
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f'(x) dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f'(x_i) \frac{\Delta x_i}{b - a}.$$

上等式可解讀成: 左側表函數  $f(x)$  在區間  $[a, b]$  上的總平均值, 等於右側所示之各區段上的瞬間平均值  $f'(x_i)$  乘以所佔區段比例  $\frac{\Delta x_i}{b-a}$  的加總再取極限.

簡單地說, 欲求總平均時可由先求各小區段之平均值乘以對應之比例再加總而得. 讀者請想想看, 日常生活中, 常要算各種平均值時, 是不是都照此原則進行? 由此可知定積分之為用是多麼廣泛了.

## 判定實級數收斂之流程圖

由以上諸例,不難整理出如下之流程圖,可做為判定級數斂散性之參考.希讀者善利用之.



註:除了交錯級數及一些特殊級數外,無窮級數之斂散性大都可藉其對應之瑕積分的斂散性來判定之.

## 6.7 練習題

1. 試求下列各函數的反導.

a)  $f(x) = x^2 - 3$    b)  $f(x) = \sqrt{x+2}$    c)  $f(x) = \frac{x^2-5}{x+1}$

d)

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{當 } x \leq 1 \text{ 時} \\ x + 5 & \text{當 } x < 1 \text{ 時} \end{cases}$$

2. 利用黎曼和的極限為定積分, 求下列黎曼和之極限值.

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \frac{1}{n}}$     b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{4k}{n} \frac{4}{n}}$     c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (1 + \frac{2k}{n})^2 \frac{2}{n}$   
 d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$     e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi\alpha}{n}$ , 其中  $\alpha > 0$ .  
 f)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n^2} \sqrt{\frac{k}{n^2} \frac{1}{n^2}}$

3. 求下列的定積分 (注意所予被積分函數在所予區間內有導數不存在之情況.)

a)  $\int_{-2}^3 \frac{x}{|x|} dx$     b)  $\int_{-1}^2 \min\{2x-1, 3-4x\} dx$   
 c)  $\int_{-2}^1 2[x-3] dx$  (高斯記號)    d)  $\int_{-3}^4 \frac{x^2-1}{x-1} dx$

4. 利用微積分基本定理, 試求下列定積分函數的導函數.

a)  $\int_1^{x^2} \sin^2 t dt$     b)  $\int_x^{x+1} \sqrt{2u+5} du$     c)  $\int_0^{-x} f(-z) dz$     d)  $\int_0^x (\int_0^u f(t) dt) du$   
 e)  $\int_0^{g(x)} (\frac{d}{du} g(u)) du$

5. 化解下列的不定積分.

a)  $\int \frac{dx}{\sin x}$     b)  $\int \sec x dx$     c)  $\int \sqrt{1+x^2} dx$     d)  $\int \cos^3 x dx$     e)  $\int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx$

6. 試求下列各含積分號之函數的導函數.

a)  $\int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt$     b)  $\int_0^{3x^2+5} \frac{\tan^{-1} t}{t} dt$     c)  $\int_0^{2x-1} \cos t^2 dt$   
 d) 令  $g(t) = \int_0^t (3+x^3)^{-1/2} dx$ , 求  $g'(1)$   
 e)  $\int_0^x x^2 \sin(t^2) dt$

7. 若  $f(x) = \int_0^{g(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt$ , 而  $g(x) = \int_0^{\cos x} [1 + \sin(t^2)] dt$ , 求  $f'(\pi/2)$ .

8. 求  $\frac{d^2}{dx^2} \int_0^x (\int_1^{\sin t} \sqrt{1+u^4} du) dt$

9. 積分之MVT求  $c$  使滿足  $f(x) = 3x^2$  在區間  $[-4, -1]$  所對應定積分之平均值  $f(c)$ .

10. 求下列積分之值 (積分技巧)

a)  $\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 3\sqrt{x}) dx$     b)  $\int_4^9 y\sqrt{y^2-4} dy$     c)  $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin x dx$   
 d)  $\int_0^\pi (x+1) \tan(3x^2+6x) \sec^2(3x^2+6x) dx$     e)  $\int_0^{\sqrt{\pi/4}} x \cos x^2 e^{\sin x^2} dx$

11. 求各種測度

- a) 求由曲線  $x = y^2 - 2y$ ,  $x - y - 4 = 0$  所圍成之區域的面積.  
 b) 求由曲線  $x = y^2 - 2y$ ,  $x - y - 4 = 0$  所圍成之區域對直線  $y = -1$  迴轉所成的迴轉體之體積.

- c) 求由曲線  $x = y^2 - 2y, x - y - 4 = 0$  所圍成之區域對直線  $x = -1$  迴轉所成的迴轉體之體積.
- d) 求由曲線  $x = y^2 - 2y, x - y - 4 = 0$  所圍成之區域對直線  $x = -1$  迴轉所成的迴轉體之表面積.
- e) 求由曲線  $x = y^2 - 2y, x - y - 4 = 0$  所圍成之區域對直線  $y = -1$  迴轉所成的迴轉體之表面積.
- f) 求由曲線  $x = y^2 - 2y, x - y - 4 = 0$  所圍成之區域的周長.

## 12. 數值積分法

a)  $\int_0^3 \frac{1}{1+x^2} dx, n = 6.$     b)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, n = 4.$

## 13. 利用對稱的性質求下列的定積分 (偶奇週期函數之定積分)

a)  $\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \cos x) dx$     b)  $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{(1+x^2)^4} dx$

c)  $\int_{-1}^1 x e^{-4x^2} dx$     d)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} z \sin^2(z^3) \cos(z^3) dz$

14. 試證, 若  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上連續, 則  $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = (\pi/2) \int_0^{\pi} f(\sin x) dx$ . 並利用結果求  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$  之值.

15. a) 若  $x \sin \pi x = \int_0^{x^2} f(t) dt$ , 其中  $f$  為連續函數, 求  $f(4)$ .

b) 若  $f(x)$  可微分且恆不為零, 若  $\int_0^x f(t) dt = (f(x))^2, \forall x$ , 求  $f$ .

16. a) 若  $f$  為可逆函數, 且在  $[a, b]$  上可積分. 試證  $\int_a^b f(t) dt = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f^{-1}(t) dt$ .

b) 設  $f(x)$  連續, 且  $f(0) = 0, f(1) = 1, f'(x) > 0$ , 又  $\int_0^1 f(x) dx = 1/3$ . 求  $\int_0^1 f^{-1}(y) dy$ .

c) 利用 a) 求  $\int_0^1 (\sqrt[3]{1-x^3} - \sqrt[3]{1-x^7}) dx$  之值.

## 17 (Riemann-Stieltjes 積分)

a) 設  $g(x) = 1$  當  $0 \leq x < 1$  時且  $g(x) = 4$  當  $1 < x \leq 2$  時求  $\int_0^2 x^2 dg(x)$ .

b) 令  $g(x) = [x]$  求  $\int_0^a x dg(x), a = 1/2$  或  $2$

c) 令  $g(x) = [x]$  求  $\int_0^3 g(x) d(\sqrt{1+x^3})$

## 18. 試求暇積分之值.

a)  $\int_0^2 \frac{x}{x^2-1} dx$     b)  $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{|x^2-1|}} dx$     c)  $\int_1^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$

d)  $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2dx}{x^2-1}$     e)  $\int_{-1}^4 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$     f)  $\int_{-1}^{\infty} (\frac{x^4}{1+x^6})^2 dx$

19. a) 試求定數  $C$  之值使  $\int_0^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{x^2+4}} - C \frac{1}{x+2}) dx$  收斂, 並求此時之積分值.

b) 試求定數  $C$  之值使  $\int_0^{\infty} (\frac{x}{x^2+1} - C \frac{1}{3x+1}) dx$  收斂, 並求此時之積分值.

20. 求下列之極限值.

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+\sin t} dt}{x}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 3} (\frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt)$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1-\tan 2t)^{1/t} dt}{x}$ .

21. 試求函數  $f$  滿足  $f(1) = -1, f(4) = 7, f'(x) > 3, \forall x$ . 不然證明如此之函數不存在.

22. 試指出下列級數何者收斂? 何者發散? 並示理由.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 3^n}{(n+1)!}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\ln n}$   
 c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n^3-2n^2+11}$     d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

23. 利用極限檢定法檢定下列正項級數之斂散性.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n^2 \cdot 2^n}$   
 c)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{(1-n)/n}$

24. 利用比值檢定法檢定下列正項級數之斂散性.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$   
 c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}$

25. 試決定下列級數之斂散性

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n}{3n+1})$   
 c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$     d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3n}{1+(1.2)^n}$

26. 求下列級數之和.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{2^{3n}}$     b)  $\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n]$

27. 利用定積分檢定法檢測下列級數之斂散性.

- a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , 其中  $p$  為與  $n$  無關之實數.  
 b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ , 其中  $p$  為與  $n$  無關之實數.  
 c)  $\sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$ , 其中  $p$  為與  $n$  無關之實數.  
 d)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ .  
 e)  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}}$ .

28. 求下列極限值.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}$$

## 第六章之習題解答

$$\begin{aligned} 1. \text{ a) } & \frac{x^3}{3} - 3x + C \quad \text{b) } \frac{2}{3} \sqrt{(x+2)^3} + C \\ \text{c) } & f(x) = x - 1 - \frac{4}{x+1}, \therefore D_x^{-1} f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 4 \ln|x+1| + C \\ \text{d) } & \end{aligned}$$

$$D_x^{-1} f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + C & x < 1 \\ \frac{x^2}{2} + 5x + C & x > 1 \\ \text{不存在} & x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } & \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \\ \text{b) } & \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 = \frac{16}{3}. \\ \text{c) } & \int_0^2 (1+x)^2 dx = \frac{1}{3} (1+x)^3 \Big|_0^2 = 9 - \frac{1}{3}. \\ \text{d) } & \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 t}{\sec t} dt = \ln|\sec t + \tan t| \Big|_0^{\pi/4} = \ln(\sqrt{2} + 1). \\ \text{e) } & = \int_0^1 \sin \alpha \pi x dx = \frac{1}{\alpha \pi} (-\cos \pi \alpha) \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi \alpha} (1 - \cos \alpha \pi). \\ \text{f) } & \text{同 a), } = 2/3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ a) } & \int_{-2}^3 \frac{x}{|x|} dx = \int_{-2}^0 (-1) dx + \int_0^3 1 dx = 5. \\ \text{b) } & \int_{-1}^2 \min\{2x-1, 3-4x\} dx = \int_{-1}^{2/3} (2x-1) dx + \int_{2/3}^2 (3-4x) dx = -10/3 \\ \text{c) } & \int_{-2}^1 2[x-3] dx = \int_{-5}^{-2} 2[t] dt = \int_{-5}^{-4} -10 dt + \int_{-4}^{-3} -8 dt + \int_{-3}^{-2} -6 dt = -24. \\ \text{d) } & = \int_{-3}^4 (x+1) dx, \text{ 但 } x \neq 1, \\ & = \int_{-3}^1 (x+1) dx + \int_1^4 (x+1) dx = 101/2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \text{ a) } & = \frac{d}{dx} \left[ \int_1^{x^2} \sin^2 t dt \right] = \sin^2 t \Big|_{(z=x^2)} \frac{d(x^2)}{dx} = 2 \sin^2(x^2) 2x. \\ \text{b) } & = \frac{d}{dx} \int_x^{x+1} \sqrt{2u+5} du = \sqrt{2(x+1)+5} \frac{d(x+1)}{dx} - \sqrt{2x+5} \frac{dx}{dx} = \sqrt{2x+7} - \sqrt{2x+5}. \\ \text{c) } & = \frac{d}{dx} \int_0^{-x} f(-z) dz = f(-z) \Big|_{(z=-x)} \frac{d(-x)}{dx} = f'(x)(-1). \\ \text{d) } & = \int_0^x f(t) dt. \\ \text{e) } & = g'(u) \Big|_0^{g(x)} \frac{dg(x)}{dx} = g'(g(x)) g'(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \text{ a) } & -\ln|\csc x + \cot x| + C \\ \text{b) } & \ln|\sec x + \tan x| + C \\ \text{c) } & = \frac{1}{2} \sqrt{1+x^2} x - \ln|\sqrt{1+x^2} + x| + C, \text{ 其中令 } x = \tan u \text{ 進行.} \\ \text{d) } & = \int (1 - \sin^2 x) d \sin x = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

e)  $\ln \frac{xe^x}{1+xe^x} + C$  (提示: 令  $u = (1 + xe^x)$  變數變換.)

6. a)  $\frac{e^x}{1+x}$

b)  $(F(3x^2 + 5) - F(0))' = \frac{\tan^{-1}(3x^2+5)}{3x^2+5}(6x)$ .

c)  $\cos(2x - 1)^2(2)$

d)  $g'(1) = (3 + t^3)^{-1/2}|_{t=1} = 1/2$ .

e)  $2x \int_0^x \sin t^2 dt + x^2 \sin x^2$ .

7.  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}|_{t=g(x)}g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+g^3(x)}}g'(x)$ , 其中  
 $g(\pi/2) = 0, g'(\pi/2) = -1. \therefore f'(\pi/2) = -1$ .

8.  $= \frac{d}{dx} \int_1^{\sin x} \sqrt{1+u^4} du = \sqrt{1+\sin^4 x} \cos x$ .

9.  $f(c) = \frac{\int_{-4}^{-1} f(x) dx}{-1-(-4)}$ , 即  $3c^2 = \frac{x^3|_{-4}^{-1}}{3}, \therefore c = -\sqrt{7} \in [-4, -1]$ .

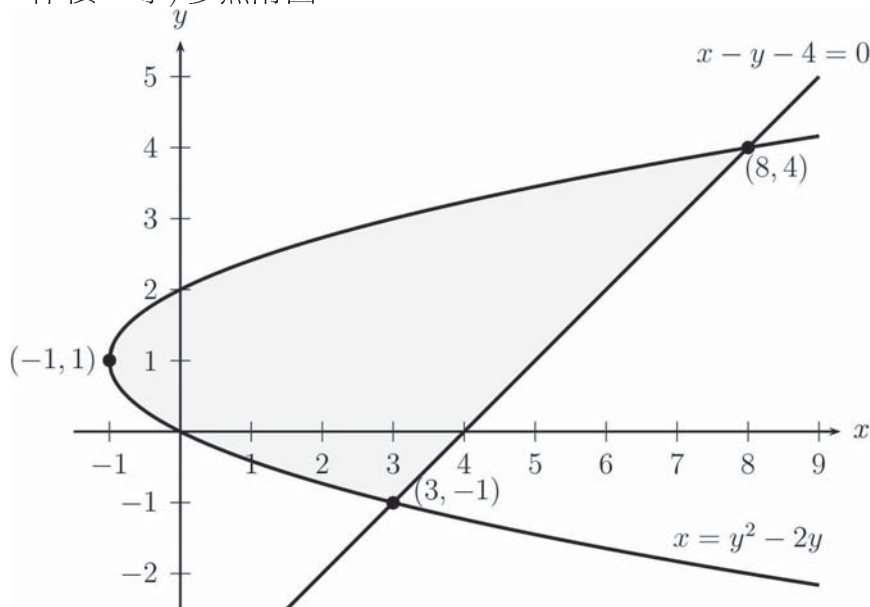
10. a)  $= x^4/4 - x^3 + 3x^{3/2}/(3/2) = 5/4$ .

b)  $= \int_4^9 \sqrt{y^2 - 4} dy = 1/3(77^{3/2} - 12^{3/2})$ .

c)  $= -\cos^5(x/5)|_0^{\pi/2} = 1/5$ .

d)  $= \frac{1}{12} \tan(3\pi^2)$ .

11. (求面積、體積、等) 參照附圖:



$$\begin{aligned}
 \text{a)} &= \int_{-1}^4 ((y+4) - (y^2 - 2y)) dy \\
 \text{b)} &= \int_2^4 2\pi(y - (-1))((y+4) - (y^2 - 2y)) dy \text{ (圓殼法 (shell method))} \\
 \text{c)} &= \int_{-1}^4 [(y+4 - (-1))^2 - ((y^2 - 2y - (-1))^2)] \pi dy \text{ (圓盤法 (disk method))} \\
 \text{d)} &= \int_2^4 [(y^2 - 2y) - (-1)] 2\pi dy + \int_{-1}^4 [(y+4 - (-1)) 2\pi dy + \int_{-1}^2 ((y^2 - 2y - (-1))) 2\pi dy \\
 \text{e)} &= \int_{-1}^4 [(y+4 - (-1)) + ((y^2 - 2y - (-1)))] 2\pi dy \\
 \text{f)} &= 5\sqrt{2} + \int_{-1}^4 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy, \text{ 其中 } x = y^2 - 2y.
 \end{aligned}$$

12. a) (拋物線法)  $\approx 1.2471$     b) (梯形法)  $\approx 0.9068$

13. a) 0    b) 0    c) 0    d) 0

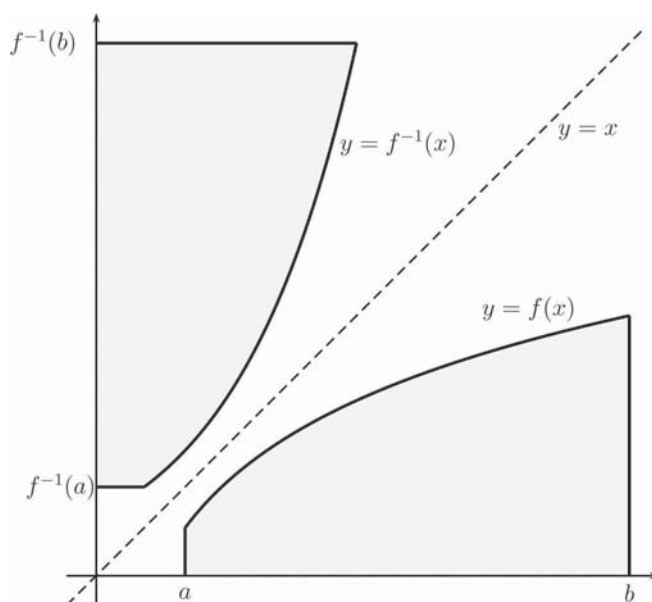
14. i) 令  $x = \pi - u$  可得證欲證式.

ii)  $f(u) = \frac{u}{2-u^2}, \therefore \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \tan^{-1}(\cos x) \Big|_0^\pi = \pi^2/2.$

15. a) 兩邊取導得  $\sin \pi x + \pi x \cos \pi x = f(x^2)2x$  再令  $x = 2$  可得  $f(4) = \pi/2$

b) 兩邊取導得  $f(x) = 2f(x)f'(x), \therefore f(x) \neq 0, \text{ 得 } f'(x) = 1/2, \text{ 亦即 } f(x) = 1/2x + C. \text{ 由驗算知, } C = 0. \text{ 故得 } f(x) = 1/2x.$

16. a) 由逆函數之圖形與正函數之圖形的對直線之對稱關係即可得證  $\int_a^b f(t) dt = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(t) dt.$



另解：亦可直接利用定積分之定義進行如下，

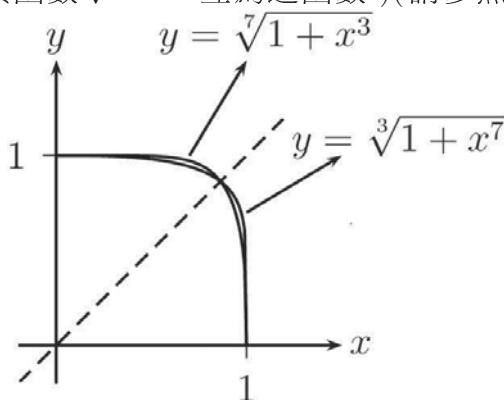
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n y_i\Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i = \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f^{-1}(y)dy,$$

其中  $\Delta y_i = (y_i - y_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1})$ ,  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = (f^{-1}(y_i) - f^{-1}(y_{i-1}))$ , 而  $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ,  $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$  分別為區間  $[a, b]$  與  $[f^{-1}(a), f^{-1}(b)]$  上對應的分割。

註1: 此部分無法透過變數變換法證得, 請讀者試試看。

b) 由 a) 知  $\int_0^1 f^{-1}(y)dy = \int_{f^{-1}(0)}^{f^{-1}(1)} f^{-1}(y)dy = \int_0^1 f(x)dx = 1/3$

c) 0 (注意函數  $\sqrt[7]{1-x^3}$  與函數  $\sqrt[3]{1-x^7}$  互為逆函數.) (請參照附圖)



註2: 考慮  $f(x) = x^3$  在區間  $[0, 1]$  上, 則顯然  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(y)dy$ . 注意, 此時不可將右側變數變換成  $\int_0^1 f^{-1}(x)dx (= 3/4)$ , 而有導致發生錯誤之虞. (請問何以 c) 部分不會發生如此情況?)

17. a)  $= 1^2(4-1) = 3$ .

b)  $\int_0^{1/2} x \cdot 0 = 0$ ;  $\int_0^2 x dg(x) = \int_{1^-}^{1^+} 1 \cdot 1 = 1$ .

c)  $= \int_0^1 0d\sqrt{1+x^3} + \int_1^2 d\sqrt{1+x^3} + \int_2^3 2d\sqrt{1+x^3} = 2\sqrt{28} - \sqrt{2} - 3$ .

18. a) 發散 b)  $(1 + \sqrt{3})$  c) 發散

d)  $-\ln 3$  e) 2 f)  $\pi/8 - 1/12$ . (提示: 令  $x^3 = \tan u$ .)

19. a)  $C = 1; \ln 2$  b)  $C = 1; -\ln 3$

20. a)  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}}{1} = 1$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} x \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\int_3^x \frac{\sin t}{t}}{x-3} = 3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x/x}{1} = 3 \frac{\sin 3}{3} = \sin 3$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (1-\tan 2t)^{1/t}}{x} (= 0/0)$ , 由 L'Hopital rule

$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \tan 2x)^{1/x} (= 1^\infty)$ , 再一次利用 L'Hopital rule 得  $e^{-2}$ .

21. 若此函數存在, 則由所予假設知, 它必滿足平均值定理, 即  $\frac{f(4)-f(1)}{4-1} = f'(\xi)$ , 其中  $\xi \in (1, 4)$ . 但因  $f'(x)$  恆大於 3, 顯然上等式不會成立. 故得證此函數不存在.

22. a) 收斂 (利用比值檢定法)

b) 收斂 (利用交錯級數檢定法)

c) 收斂 (取  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$  再做極限比較法)

d) 收斂 ( $\because \ln n < n^{1/2}, \forall n > 20$  而  $\sum_{n=20}^{\infty} 1/n^{3/2}$  收斂)

23. a) Divergent ( $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{n^2}{n^3+1})}{1/n} = 1$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ : 發散)

b) convergent ( $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{(n+1)(n+2)}{n^2 2^n})}{1/2^n} = 1$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n$ : 收斂)

c) Divergent ( $\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \frac{1-n}{1/n}}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ : 發散)

24. a) 發散 (因  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = e > 1$ .)

b) 發散 (因  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = \infty > 1$ .)

c) 收斂 (因  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = 2/3 < 1$ .)

25. a) 收斂 (交錯級數檢定法)

b) 發散 (末項不趨於 0)

c) 收斂 (交錯級數檢定法)

d) 收斂 ( $\because \forall n \in \mathbb{N}, |\frac{\cos 3n}{1+1.2^n}| \leq \frac{1}{1.2^n}$  而後者為收斂等比級數)

26. a)  $S = \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{-3}{8})^{n-1} = 1/11$     b)  $S = \pi/4$  (對消型) ( $\sum_{n=1}^{\infty} [\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} n] = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1} 1) = \pi/4$ .)

27. a) 當  $p > 1$  時, 由積分檢定法得知所予級數收斂; 當  $p \leq 1$  時, 由積分檢定法得知所予級數發散.

b) 當  $p > 1$  時, 由積分檢定法得知所予級數收斂; 當  $p \leq 1$  時, 由積分檢定法得知所予級數發散.

c) 當  $p > 1$  時, 由積分檢定法得知所予級數收斂; 當  $p \leq 1$  時, 由積分檢定法得知所予級數發散.

d) 收斂, 因  $(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln(\ln n) \ln n} = e^{\ln n \ln(\ln n)} = e^{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} = n^{(\ln \ln n)}$ .

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{(\ln \ln n)}} \leq \sum_{n=2}^{\infty} n^{-1/10}$ , 其中利用  $\ln n < n^{1/10}, \forall n \geq 10$ .

e) 收斂, (同 (d) 之解法可得.)

28. a) 所予式  $= e^{\int_0^1 \ln x dx} = e^{-1}$ .

b) 所予式  $= 1$ . (提示) :  $\ln n - \ln 2 < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln(n-1)$  再用夾擊定理.

