

# 第五章

## 微分法——單變實函數之除法概念

內容

5.1 本章宗旨

5.2 認識導數

5.3 如何求所予函數之導數？

5.4 相關題材——微分 (differentials)、高階導數

5.5 有了導數後, 所予函數有何特性?—實函數之可微分性、局部平均性、線性近似法、局部增減性、局部快慢性等

5.6 如何從局部性 (local property) 轉移成整體性 (global property)—可微分函數、導函數、MVT、Taylor 公式

5.7 各種應用——實函數之曲線描法、不定型 (Indeterminate Forms) 問題

5.8 本章統合

5.9 練習題

### 5.1 本章宗旨

本章專門討論函數  $f(x)$  所引出之商型函數  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  的所謂相對極限 (Relative Limits), 即導數 (derivative)  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  是否存在的問題以及所衍生的相關性質. 惟此處所指的相對是對自變數而言而已.

本章可視為探討實函數之'除法'(對一次自變數  $(x - c)$  者) 的第一步.

## 5.2 認識相對極限——導數

### 導數之定義

Let  $f$  be a given real function defined on a interval  $I$  containing  $c$ . We say that  $f$  is differentiable(可微分) at  $c$  if the limit

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

exists. The limit is called *the derivative*(導數) of  $f$  at  $c$ , denoted by  $f'(c)$ .

意即：實函數  $f$  在  $c$  點可微分的充要條件是極限  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  要存在。此極限值就稱為函數在  $c$  之導數，常以  $f'(c)$  表示。亦即

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

針對上述定義，有下列幾點補充。

i) 一般而言， $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  表實函數  $f$  在  $c$  點的變化率(rate of change)，所以極限  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  可解讀為實函數  $f$  在  $c$  點的瞬間平均變化率(instantaneous rate of average change)，此瞬間變化率在物理學上便稱為速率(speed)(當變數  $x$  看成時間時)；在經濟學上便稱為邊際成本(marginal cost)(當  $x$  看成生產某物品的單位時)表在產量  $c$  時再生產一單位產品所需成本；在幾何學上便稱為切線的斜率(the slope of tangent line.)(當視為函數曲線上兩點  $(x, f(x))$ ,  $(c, f(c))$  所決定的直線時)請讀者特別留意變化率一詞中‘率’(rate)之含意，有相對的概念，它與變化量(change)有所差別。

ii) 請記住，導數就是一種極限——相對極限。其表示法除了上列用  $'$  表示外，尚有好幾種表示法，各有各的優缺點。常見的如  $\frac{dy}{dx}$ ,  $D_x$ ,  $\dot{f}$  等等。函數之相對極限可視為多項式除法的延伸。由於一般函數沒有除法的定義，怎麼給它們定義除法呢？此處提供的方法是用極限的概念，即相對極限法。若相對極限(即導數)存在，則它可視為  $f(x) - f(c)$  被  $(x - c)$  除‘時’所得的‘瞬時商’(instantaneous quotient)。

iii) 請特別注意‘瞬間’的含意：好像種子剛發芽的那一刻，能掌握此一刻，似乎可以掌握以後的成長情形一樣。只要能掌握瞬間的情況，方能掌握實際發生的情況，不像國中時唸的理化，只能討論到不是那麼明確的平均的概念，如平均速度等，對運動原理的瞭解只能含混以對而已；或只能求比較規則的幾何圖形的面積。有了極限之概念

後,就不一樣了,不但可以探討即時的運動狀況,而且能求到較不規則的幾何圖形的測度.

iv) 記住先取導後代的程序規則,  $f'(x_0)$ , 以免引進太多的符號.

v) 導數不存在的意義: 由導數的定義得知, 不管如何分子與分母都須趨近於零才有存在的可能. 當分子不趨近於零時 (如所予函數在對應點處不連續時), 導數必不存在 (因分母必趨於0), 屬  $\pm\infty$  型, 此類型之不存在在幾何上亦有其意義, 可解讀為對應點所引之切線必垂直於  $x$  軸.

例1 試求實函數  $f(x) = x^3$  在  $x = -1$  處之導數.

$$\text{解 } f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - (-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3.$$

例2 試求實函數  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  處之導數  $f'(0)$ .

$$\text{解 } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} : \text{不存在 (參照 p.119)}$$

例3 令

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

問  $f(x)$  在  $x = 0$  處有導數嗎?

解 有, 因

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin 1/x = 0.$$

( $\because |x \sin 1/x| \leq |x|$ ). 而

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos 1/x & x \neq 0 \text{ (此式之來由詳見底下之註1.)} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

可見  $f'(x)$  在  $x = 0$  處不連續. (因  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  不存在.)

註1:  $f(x)$  當  $x \neq 0$  之導函數為 (按定義進行):

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 \sin\left(\frac{1}{x + \Delta x}\right) - x^2 \sin \frac{1}{x}}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sin \frac{1}{x+\Delta x} - \sin \frac{1}{x}) + 2x\Delta x \sin \frac{1}{x+\Delta x} + (\Delta x)^2 \sin \frac{1}{x+\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 2 \cos \frac{1}{2}(\frac{1}{x+\Delta x} + \frac{1}{x}) \sin \frac{1}{2}(\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}) + 2x\Delta x \sin \frac{1}{x+\Delta x} + (\Delta x)^2 \sin \frac{1}{x+\Delta x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{2}(\frac{1}{x+\Delta x} + \frac{1}{x}) \frac{\sin \frac{1}{2} \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{2}} + 2x \sin \frac{1}{x} \\
&= x^2 \cos(1/x)(-1/x^2) + 2x \sin(1/x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

上過程中, 用到極限基本型  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

註2: 有關  $f'(0)$  的部分, 很多初學者常犯錯誤的是先求  $f'(x)$  再以  $x = 0$  代入, 而得  $f'(0)$  不存在之結論. 須知如上所求之  $f'(x)$ , 其中  $x \neq 0$ , 不能以  $x = 0$  代.

### 5.3 如何求導數?

欲求一所予函數的導數, 不論存在與否, 是不是每次都須由定義開始? 假如是如此的話, 那不是太無聊了嗎? 所以, 有下列的求導運算律可節省不少的演算時間.

#### 求導律

設  $f, g$  為兩可微分實函數, 則下列運算律成立:

$$\text{Addition Rule (和律)} \quad (f + g)' = f' + g'$$

$$\text{Difference Rule (差律)} \quad (f - g)' = f' - g'$$

$$\text{Product Rule (積律)} \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\text{Quotient Rule (商律)} \quad (f \div g)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2(x)}$$

$$\text{Chain Rule (連鎖律)} \quad (f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

其中連鎖律亦常表成

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

註：由上等式之右側可得知當導數以  $\frac{dy}{dx}$  表示時，似乎可視它為一分式，分子分母可乘除另一‘變數’。這是使用記號  $\frac{dy}{dx}$  之優點。

有了以上的運算律後，以後若要求各種實函數的導數就不用每次都透過導數之定義進行。只須知道下示初等函數的導數即足。即

初等實函數之求導公式

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1, \quad f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0, k \text{ 爲定數}$$

$$(x^a)' = \frac{d(x^a)}{dx} = ax^{a-1} \quad \text{其中 } a \text{ 爲與 } x \text{ 無關之任予實數 (證明見對數微分法 p.121 例 2)}$$

$$(\ln |x|)' = \frac{d(\ln |x|)}{dx} = 1/x \quad x \neq 0 \text{ (證明見 p.124 例 1)}$$

$$(e^x)' = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

$$(\sin x)' = \frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x$$

$$(\cos x)' = \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

運算律的證明

和律與差律，比較簡單，請讀者自證。在此先證積律如下：

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f \cdot g(x) - f \cdot g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(x) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} g(x) \frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \lim_{x \rightarrow c} f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\ &= g(c)f'(c) + f(c)g'(c). \end{aligned}$$

由於  $c$  可爲任予點，故得證積律

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

註：上述證明中，用及函數之可微分性必蘊涵連續性，不知道讀者看出來沒？詳見 p.125 之註 2。另外，在數學上常為配合假設的需要，加減一項以促成所需要的型式，不知讀者有否感其妙用之所在。

至於商律，讀者可仿上進行，在此不佔篇幅。

次證連鎖律如下：

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(g(x)) - f(g(c))}{g(x) - g(c)} \cdot \lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \\ &= f'(g(c)) \cdot g'(c)\end{aligned}$$

由於  $c$  可為任予點，故得證連鎖律

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

註：以上證明都一再用到函數的可微分性，不知讀者查覺否？不過請記得先導後代的程序。另外，為配合所予假設，證明過程中乘除一因式也很管用，亦請讀者多模仿之。

**例 1** 求  $D_x(1+x^2)^3$ 。

**解** 1) 將  $(1+x^2)^3$  展開之，

$$(1+x^2)^3 = 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6.$$

2) 按基本求導公式逐項取導得

$$\begin{aligned}D_x(1+x^2)^3 &= D_x(1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6) \\ &= 6x + 12x^3 + 6x^5 = 6x(1+x^2)^2\end{aligned}$$

**另解** 直接利用連鎖律：

$$\begin{aligned}D_x(1+x^2)^3 &= 3(1+x^2)^2 D_x(1+x^2) \\ &= 3(1+x^2)^2 2x = 6x(1+x^2)^2\end{aligned}$$

註：上例因  $(1+x^2)^3$  可直接展開，故欲求其導數，可不用連鎖律。但下例則非用連鎖律不可了。

**例 2** 求  $D_x(1+x^2)^{1/3}$ 。

**解** 令  $1+x^2 = g(x)$ ,  $f(x) = (1+x^2)^{1/3}$ , 則所予式變為  $D_x f(g(x))$ , 由連鎖律得

$$\begin{aligned} D_x(1+x^2)^{1/3} &= \frac{1}{3(1+x^2)^{-2/3}} D_x(1+x^2) \\ &= \frac{1}{3(1+x^2)^{-2/3}} 2x = \frac{2x}{3(1+x^2)^{2/3}} \end{aligned}$$

**例 3** 求  $\frac{dx^2}{d\sqrt{x}}$ 。

**解** 利用連鎖律：

$$\frac{dx^2}{d\sqrt{x}} = \frac{dx^2}{dx} \frac{dx}{d\sqrt{x}} = 2x \cdot 2\sqrt{x} = 4\sqrt{x^3}.$$

**另解** 令  $\sqrt{x} = u$ , 則  $x^2 = u^4$ . 所予式變為  $\frac{du^4}{du} = 4u^3 = 4(\sqrt{x})^3$ .

註：上列兩種解法，實都是代換法的戲碼，請讀者仔細比較。

### 對數取導法 (Logarithmic Differentiation)

對數取導法其實就是利用對數可把乘除換成加減的性質，把繁雜的函數（含有乘除的式子）先取對數化成加減再行取導。由於對有乘除的式子直接取導時，比較容易出錯之故。在使用對數取導法的過程中，須把其中各因子當成正數來處理，不過這只是借用一下而已，一切還得恢復原狀，所以在整個過程中，不用管其中各因子是否為正應無妨。

**例 1** 令  $y = \sqrt[5]{\frac{(x-3)^4(x^2+1)}{(2x+5)^3}}$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ 。

**解** 兩邊取對數得  $\ln y = 1/5(4 \ln(x-3) + \ln(x^2+1)) - 3 \ln(2x+5)$ ,  
兩邊再取對  $x$  之導數得

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = 1/5 \left[ 4 \frac{1}{x-3} + \frac{2x}{x^2+1} - 3 \frac{2}{2x+5} \right].$$

整理之，得  $\frac{dy}{dx} = (y/5) \left[ \frac{4}{x-3} + \frac{2x}{x^2+1} - \frac{6}{2x+5} \right]$ .

**例 2** 令  $y = x^a$ , 其中  $a$  為任予實數, 並與  $x$  無關. 試求  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 直接由定義進行時有困難, 尤其是當  $a$  為無理數時. 利用對數求導法則直截了斷. 兩邊取對數得  $\ln y = a \ln x$ , 兩邊對  $x$  取導數得

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = a \cdot \frac{1}{x}$$

整理之, 得

$$\frac{dy}{dx} = ay \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

註: 上例中的  $a$  若與  $x$  有關時怎麼辦? 請見下例.

**例 3** 令  $y = x^x$ , 求  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 兩邊取對數得  $\ln y = x \ln x$ , 兩邊再取對  $x$  之導數得

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

整理之, 得

$$\frac{dy}{dx} = y(\ln x + 1) = x^x(1 + \ln x).$$

註: 此例之提出, 用意是在跟上例做一區別. 當指數與底數之  $x$  有關時怎麼處理. 對初學的讀者來說, 常誤解  $\frac{d(x^x)}{dx} = xx^{x-1} = x^x$ . 須注意的是,  $x^x$  既不屬於指數函數也不屬於乘冪函數. 遇此情況時, 最好均換底成  $x^a = e^{a \ln x}$  及  $x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$  準沒錯, 如此便可利用指數函數之求導法進行或如上例兩邊取對數在取導進行.

### 隱微分法 (Implicit Differentiation)

欲求定義在方程式  $f(x, y) = 0$  中的函數的導函數時, 一般是要解出  $y$  以  $x$  表示再取  $\frac{dy}{dx}$ . 惟有時所給的方程式無法解出, 那該怎麼辦? 但隱微分法可以不用解出  $y$  可直接從所給的方程式, 兩邊對  $x$  取導, 視  $y$  為  $x$  之函數進行. (見例 2)

**例 1** 利用隱微分法求方程式  $x^2 + y^2 = 1$  中的  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 對方程式之兩側取對  $x$  之導數得

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

解出  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ . 注意,  $y \neq 0$ .

註: 將  $y$  由所予方程式解出得  $y = \sqrt{1-x^2}$ , 再求  $\frac{dy}{dx}$  亦得  $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$ . 所得結果相同. 附帶一提的是,  $y \neq 0$  之意為在  $y = 0$  附近處  $y$  無法成爲  $x$  的函數, 不是函數當然沒有導數.

**例 2** 利用隱微分法求方程式  $x^2y + \cos y = 5$  中的  $\frac{dy}{dx}$ .

**解** 對方程式之兩側取對  $x$  之導數得

$$2xy + (x^2 - \cos y) \frac{dy}{dx} = 0$$

解出  $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2 - \cos y}$ . 注意,  $x^2 - \cos y \neq 0$ .

註: 此例中所予之方程式便無法解出  $y$  (以  $x$  表示), 但隱微分法仍可派上用場.

### 隱微分法的應用——座標幾何學中有關二次曲線的切線斜率求法

讀者在高中所學的二次曲線常被要求求它們的切線, 其理何在? 這是因為切線是切點附近之曲線的最佳線性表示. 至於切線的求法可由切點及切線的斜率決定. 其中的斜率便可由上述的隱微分法求得, 不必在用二次方程式有等根的條件來求了.

**例** 試證橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  上過其上一點  $(x_0, y_0)$  所引的切線為  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ .

**證** i) 利用隱求導法先求切線之斜率:  $\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0y'}{b^2} = 0$ . 由此解得  $y' = -\frac{x_0b^2}{y_0a^2}$ ,  $y_0 \neq 0$ .

ii) 將 i) 所得之  $y'$  代入過點  $(x_0, y_0)$  之直線方程式:  $y - y_0 = y'(x - x_0)$  中整理之, 得  $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ . 其中用到  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ . (因  $(x_0, y_0)$  在所予橢圓上.)

註: 讀者還記得以前沒用隱求導法是如何求得切線方程式的嗎? 是透過二次方程式有重根之特性求到的.

### 逆函數的微分法

設  $f$  為可逆的可微分函數且  $f'(x) \neq 0$ , 則

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(t)} \Big|_{t=f^{-1}(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

注意, 此處是先導後代.

**逆函數定理 (The Inverse Function Theorem)**——實即逆函數之求導法

Let  $f$  be 1-1 and continuous on an interval  $I$ . If  $f'(x_0)$  exists and is nonzero for some  $x_0 \in I$ , then  $f^{-1}$  is differentiable at  $y_0 = f(x_0)$  and

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

意即, 設  $f$  在區間  $I$  上為一對一且連續的函數. 若對某  $x_0 \in I$ ,  $f'(x_0)$  存在且不為 0, 則  $f^{-1}$  在  $y_0$  處必為可微分並有下等式成立.

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

請初學者特別注意, 上式兩側之變數不同.

**定理證明** 令  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ ,  $x = f^{-1}(y)$ . 由導數之定義,

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

其中用到  $y \rightarrow y_0 \Leftrightarrow x \rightarrow x_0$  (可導必連續) 且  $f'(x_0) \neq 0$ .

註: 上定理之證明亦可由反函數之定義  $f(f^{-1}(y)) = y$  開始. 兩邊對  $y$  取導得  $f'(f^{-1}(y))(f^{-1})'(y) = 1$  (其中用及連鎖律) 再移項即可得證. ( $y$  須再以  $y_0$  代.) 此證法雖然簡潔, 惟須先曉得  $f^{-1}(y)$  為可微分, 而此就是欲證之對象.

**例 1** 利用逆函數定理, 試求  $\frac{d \ln x}{dx}$ .

**解** 須知  $\ln x$  為  $e^x$  之逆函數, 故由逆函數定理得

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{\left. \frac{de^t}{dt} \right|_{t=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = 1/x, x > 0.$$

**例 2** 利用逆函數定理, 試求  $\frac{d \sin^{-1} x}{dx}$

**解** 須知  $\sin^{-1} x$  為  $\sin x$  之逆函數, 故由逆函數定理得

$$\begin{aligned} \frac{d \sin^{-1} x}{dx} &= \frac{1}{\left. \frac{d \sin t}{dt} \right|_{t=\sin^{-1} x}} \\ &= \frac{1}{\cos(\sin^{-1} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

## 5.4 有導數的函數, 有何特性?

### 1° 實函數的可微分性 (Differentiability of Real Functions)

具體而言, 實函數在某定點具可微分性就是指該函數在所予點有切線之意, 而實函數之具可微分性則指在其定義域中的每一點都有切線可引之意. (記住, 引切線時其斜率  $f'(x_0)$  都須雙側極限存在, 意即沒有半切線的說法, 除非在區間之端點.)

**重要性質:** 可微分必連續. 反之未必. 意即: 若實函數  $f$  在某區間  $(a, b)$  上可微分性, 則  $f$  必在同一區間上連續. 換言之, 不連續之點處, 函數必不可微分.

**證** 由定義知:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} f(x) - f(c) &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \lim_{x \rightarrow c} (x - c) = \text{定數} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

可見  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ , 此即表  $f$  在  $c$  處連續, 而  $c$  可任予取, 故得證.

**另證** (反證法) 若  $f(x)$  在  $x = c$  處不連續, 則其差商比  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  中的  $f(c)$  無從列出, 此即表其對應導數必不存在, 故與假設不合. 得證.

反之, 如  $f(x) = |x|$  在  $x = 0$  處連續但不可微分.

註1: 上證法中, 為配合假設有導數存在之假設, 除乘因子  $(x - c)$ , 這看起來沒什麼了不起, 卻是很關鍵. 希讀者慢慢培養這種 feeling.

註2: 其實, 只要導數存在, 必  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  (即表  $f(x)$  在  $x = c$  處連續), 在依據第四章的極限概念知  $f(x) - f(c)$  必含因式  $(x - c)$ , 以便與分母對消. 否則的話, 導數  $f'(c)$  就不存在, 蓋其分母  $\lim_{x \rightarrow c} (x - c) = 0$

**例** 若  $f'(c) > 0$ , 則有正數  $\varepsilon$  所對應的  $c$  的一鄰域  $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  使  $f'(x) > 0 \forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$  均成立.

**證** (須知導數是一極限值, 它是某一集團的代表值, 今代表值都正的了, 其他附近之值夫復何言.)

由假設  $f'(c) > 0$  知,  $\exists \varepsilon > 0$  such that  $\forall x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ , we have  $f'(x) > 0$ .

### 2° 線性近似法 (Linear Approximations)

須知曲線的切線是該曲線對應於某點的最佳線性表示。為此，常以切線代替在切點附近之曲線。(以直線替代曲線雖有誤差，但也有簡單化的優點。)利用此特性可以求函數的近似值，而這便是線性近似法主要依據。實函數  $f$  在  $a$  附近所對應的值可用在  $a$  處所引的切線(若存在時)對應的值來替代(見附圖)：

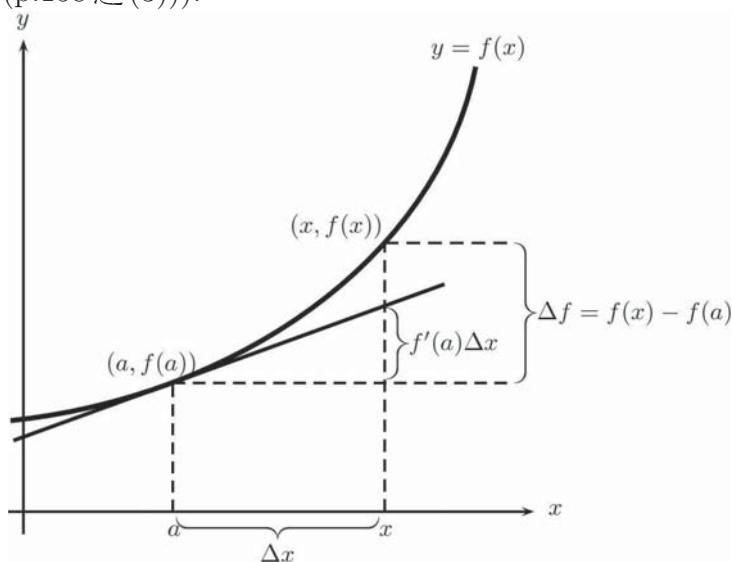
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a),$$

亦即函數的增量近似于函數的微分：

$$\Delta f(x) \approx df(x) = f'(x)\Delta x.$$

切線的重要性在此顯現無遺，何以是最佳？因在所有過切點之直線中，以切線與所予曲線之間的變動行為最相類似——彼此間對應點之距離最小。

很多的線性近似法都跟切線有關，如微分即是一例。另外，定積分的定義跟微分也關連。(詳見第六章 (p.158 之 (3)))。



**例** 試在  $a = 1$  處，求函數  $f(x) = \sqrt{x+3}$  之線性近似函數，並利用它求  $\sqrt{3.98}$  之近似值。

**解** 由上示線性近似法得  $L(x) = f(1) + f'(1)(x - 1) = 2 + \frac{1}{4}(x - 1)$ ，其中  $f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}|_{x=1} = \frac{1}{4}$ 。因  $f(x) \approx L(x)$ ，故  $\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$  (當  $x$  接近 1 時。)

欲透過  $\sqrt{x+3}$  之線性近似法求  $\sqrt{3.98}$  之近似值時，須先決定  $x$  之取值。別忘  $x$  須在 1 之附近。可見  $x = .98$ 。得  $\sqrt{3.98} \approx \frac{7}{4} + \frac{.98}{4} = 1.995$ 。

## 3° 局部增減性

若  $f'(c) > 0$ , 即  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$  時 (表  $f(x)$  在  $c$  處不但有導數且此導數為正之意), 則  $f(x)$  在  $c$  之附近必遞增 (因  $f(x) - f(c)$  與  $x - c$  同號.) 同理, 若  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0$  時 (表  $f(x)$  在  $c$  處不但有導數且此導數為負之意), 則  $f(x)$  在  $c$  之附近必遞減 (因  $f(x) - f(c)$  與  $x - c$  異號.)

## 證明絕對不等式—利用函數之單調性

何謂絕對不等式? 如  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  便為絕對不等式, 因其中的  $a, b$  可為任予實數. 如下兩例中的不等式照理不算絕對不等式, 因它們不是對任予實數都成立. 以相對不等式稱呼之, 可能較妥當.

對一些不等式的建立可求助於實函數的單調性, 即由所予不等式相減而得的函數藉其導函數的正負來判定所予不等式之是否成立. 請參考下面諸例.

**例 1** 試證  $e^x \geq (1 + x), x \geq 0$ .

**解** 令  $f(x) = e^x - 1 - x$ , 則  $f'(x) = e^x - 1 \geq 0, \forall x \geq 0$  (因  $e^x \geq 1$  當  $x \geq 0$  時) 可見  $f(x)$  為遞增函數, 且  $f(0) = 0$ . 故得證.

**例 2** 試證  $\ln x \leq (x - 1) \forall x \geq 0$ .

**解** 令  $f(x) = x - 1 - \ln x$ , 則  $f(x)$  顯然為一連續函數. 由於

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} \geq 0, & \forall x \geq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} \leq 0 & \forall 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

可見  $f(x)$  對  $x \geq 1$  為遞增函數;  $f(x)$  對  $0 < x \leq 1$  為遞減函數, 且  $f(1) = 0$ . 故得證.

註: 上兩例中之不等式若想以高中所學的相減法進行恐行不通, 因其中含超越函數. 但以微分法進行可以說簡單之至.

## 一階導數之局部極值檢定法

設實函數  $f(x)$  在  $x = c$  處之導數值為 0 或不存在 (即  $f'(c) = 0$  或不存在), 但  $f'(x)$  在  $c$  之附近存在時,

i) 若  $f'(c^-) < 0, f'(c^+) > 0$ , 則  $f(x)$  在  $c$  之附近有相對極大值 (Relative Maximum)  $f(c)$ .

ii) 若  $f'(c^-) > 0, f'(c^+) < 0$ , 則  $f(x)$  在  $c$  之附近有相對極小值 (Relative Minimum)  $f(c)$ .

說明 i) 中之條件表  $f(x)$  在  $c$  之附近由遞增變遞減, 故  $f(x)$  在  $c$  之附近有相對極大值. 同樣的, ii) 中之條件表  $f(x)$  在  $c$  之附近由遞減變遞增, 故  $f(x)$  在  $c$  之附近有相對極小值.

例1 求  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$  之相對極值.

解 先求  $c$  使  $f'(c) = 0$ : 因  $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ , 故得  $c = -1, 3$

當  $c = -1$  時,  $f(-1^-) > 0, f(-1^+) < 0$ , 由上知  $f(-1) = \frac{17}{3}$  為相對極大值.

當  $c = 3$  時,  $f(3^-) < 0, f(3^+) > 0$ , 由上知  $f(3) = -5$  為相對極小值.

例2 求  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3|x| + 4$  之相對極值.

解 當  $x \geq 0$  時, 仿上例1, 得在  $c = 3$  所予函數有相對極小值; 當  $x < 0$  時, 仿上例1, 得在  $c = -1$  所予函數有相對極大值. 另外, 顯然, 所予函數在  $x = 0$  處無導數 (即  $f'(0)$  不存在, 其圖形為尖點, 因有絕對值符號在), 但  $f'(0^-) < 0, f'(0^+) > 0$ , 故知  $f(0)$  亦為相對極小值.

註: 亦有二階導數檢定法, 它實即將  $f'(c^-) < 0, f'(c^+) > 0$  改以二階導數  $f''(c) > 0$  表示而已. 不過以編者個人得經驗, 還是推薦一階導數檢定法, 理由是一來不用再求二階導數, 二來就是有時二階導數不存在時, 一階導數檢定法仍可派上用場.

#### 4° 局部平均性 — 亦即瞬間平均性

讀者在國中時學的理化裡, 式  $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  可解讀為函數  $f(x)$  在  $x$  與  $c$  之間的平均值, 而其極限就表瞬間平均性. 可見函數在  $c$  處的導數就表所予函數在  $c$  處之瞬間平均值. (即函數在自變數增加時應變數對應增加的比值.) 瞬間平均性是不是比較能顯示變化的確實情況?

## 5.5 相關題材

### 1° 微分法則

1.  $dk = 0$ , 其中  $k$  為常數.
2.  $d(ku) = kdu$ , 其中  $k$  為常數, 而  $u$  為某實函數之應變數.
3.  $d(u+v) = du + dv$ , 其中  $u, v$  分別表示實函數之應變數 (下亦同).
4.  $d(uv) = udv + vdu$
5.  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$
6.  $d(u^r) = ru^{r-1}du$ , 其中  $r$  與  $x$  無關.

7.  $d(u \circ v) = du(v)dv$  (合成函數之微分)

例 求下列各函數的微分.

(a)  $y = f(x) = 2x^3 - x + 5$

(b)  $y = f(x) = \sqrt{x^2 + 4x - 1}$

(c)  $y = f(x) = \cos(x^4 - 5x^2 + 12)$

解 直接代微分法則可得:

(a)  $dy = (6x^2 - 1)dx.$

(b)  $dy = \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+4x-1}}$

(c)  $dy = -\sin(x^4 - 5x^2 + 12) \cdot (4x^3 - 10x)dx.$

## 2° 高階導數

讀者已知一函數的一階導數表函數的瞬間變化率,亦即表該函數在對應點處的切線斜率;它可用以決定函數之增減;亦可用以探知函數在何處有極值.至於函數的二階導數(以  $f''(x)$  或  $\frac{d^2y}{dx^2}$  表之)呢?二階導數可表函數所對應之曲線的凹性(concavity).另外,對時間的二階導數在物理學上表加速度(acceleration).函數之三、四階導數(若存在)對它也有更深的解讀如扭率(twist)及歪斜度(skewed)等,不過在初學階段,就談到二階即足.

例 求下列各情況的  $D_x^{20}y$

a)  $y = x^{19} + x^{12} + x^5 - 10$     b)  $y = x^{21} + 3x^{20}$     c)  $y = \sin 3x$

解 a)  $D_x^{20}y = 0$     b)  $D_x^{20}y = (21)!x + 3(20)!$     c)  $D_x^{20}y = 3^{20} \sin 3x.$

## 5.6 如何從局部性轉成整體性

### 導函數

一樣的,我們注重的是集體性,不是只在一點上的可微分性:若  $f$  在其定義域上的每一點都有導數時,我們就稱  $f$  為可微分函數(differentiable function).此時的導數便變成導函數  $f'(x)$  了.以式子表示時,為

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x), \forall x \in \text{dom } f.$$

注意上式中的  $\Delta x$  表  $x$  的增量.

註: 須知  $f'(x)$  表一由極限所衍生之函數, 是由  $f$  所引導出來的函數  $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$  的極限. 這是 '導' 函數的由來.

**例 1** 試求實函數  $f(x) = x^3$  的導函數  $f'(x)$ , 及其定義域.

解

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2) = 3x^2$$

由上式亦知  $f'(x)$  之定義域為  $\mathbb{R}$ .

**例 2** 試求實函數  $f(x) = |x|$  的導函數  $f'(x)$ , 及其定義域.

解 由導函數之定義知

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \begin{cases} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1 & \text{當 } x > 0 \text{ 時;} \\ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = -1 & \text{當 } x < 0 \text{ 時.} \end{cases}$$

由上述亦知  $f'(x)$  之定義域為  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . (參考 p.91 例 1.)

**例 3** 令

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

試求其導函數  $f'(x)$ . 又問  $f'(x)$  連續嗎?

解 由定義可得

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \text{ (此式之由來詳見 p.117 底之註 1.)} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

可見  $f'(x)$  在  $x = 0$  處不連續. (因  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  不存在.)

**1° 導函數型平均值定理 (The Mean Value Theorem (MVT) for derivatives)** — 廣義除法定理或因式定理

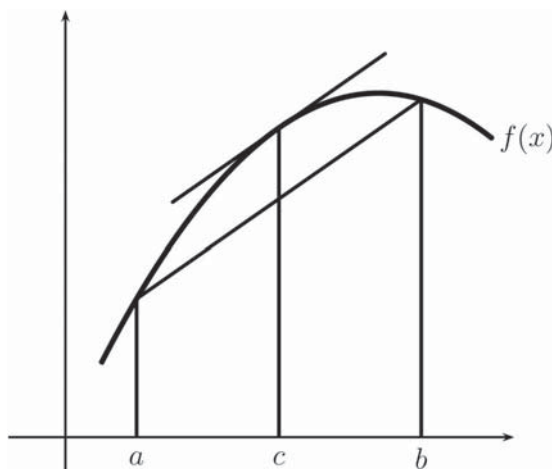
let  $f$  be a real function continued on  $[a, b]$  and differentiable on  $(a, b)$ . Then there exists a real number  $c$  such that  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

意即：設實函數  $f$  在閉區間  $[a, b]$  上連續，且在開區間  $(a, b)$  上可微分。則有一實數  $c \in (a, b)$  使  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 。

定理證明

令  $F(x) = (f(b) - f(a))x - f(x)(b - a)$ ，則

$$F(a) = F(b) = f(b)a - f(a)b$$



另外，顯然的， $F(x)$  在  $[a, b]$  上連續，並在  $(a, b)$  上可微分，故由極值定理知必有  $c \in (a, b)$  使  $F'(c) = 0$ 。由於  $F'(c) = (f(b) - f(a)) - f'(c)(b - a)$ ，故得證：

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

註1：上述證明不算難。主要關鍵在一開始令的函數  $F(x)$  是怎麼想出來的？這是透過編者一再推介的反推法來進行的。其中當然是有極值定理做依據。使用極值定理時，須找一函數  $\varphi(x)$  使其在某處的導數為0，由此反推。由於本定理的結論可改寫成  $f(b) - f(a) - f'(c)(b - a) = 0$ 。前式右側為0，是為配合極值定理的結論所需。那左側不就是要使用最大最小存在定理時所要找的函數的導數嗎？證明中的  $F(x)$  就是把左側對  $x$  取‘反導’所得的函數。（其中  $c$  須換成  $x$ 。）

註2：證明中的  $F(x)$  亦可令成  $F(x) = f(b) - f(x) - k(b - x)$ ，其中  $k$  由  $f(b) = f(a) + k(b - a)$  決定。 $k$  待定，可想像為在所予曲線  $y = f(x)$  上會平行於割線（由兩點  $(a, f(a))$ ， $(b, f(b))$  所決定者）的切線斜率。餘參見附圖。

註3: 平均值名稱之由來? 好像整段路的平均速率等於某一刻的速率(當速率有快有慢時). 它建立了瞬間與非瞬間之間的關係, 亦即極限與非極限間的相等關係. 在微積分裡, 有很多時候須把含極限的式子換成不含極限的式子, 這時非靠此處的平均值定理不可.(參考下例.)

註4: 在此有必要對 $c$ 的身份做進一步解釋. 通常平均值定理中的 $c$ , 會存在(如上定理的證明)但一般是不易找到其值的. 如何不用找到它, 來使用該等式是關鍵. 須知數學上的重要定理大都是存在性的, 如本定理. 還有中間值定理等等也是. 對初學者來說, 這是比較難以理解的地方.

**例1** 試利用平均值定理證明  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**證** 令  $f(x) = \sin x$ , 則  $f(x)$  在任何區間  $[a, b]$  上連續並可微分, 故由平均值定理得

$$\forall x, y \in [a, b], |\sin x - \sin y| = (\cos c)|x - y| \leq |x - y|,$$

其中  $c$  為某適當實數, 介於  $x, y$  之間. ( $|\cos c| \leq 1$ ).

**例2** 試利用平均值定理證明: 若  $F'(x) = G'(x), \forall x \in \text{some interval } I$ , 則有一常數  $C$  使  $F(x) = G(x) + C, \forall x \in I$ .

**證** 令  $H(x) = F(x) - G(x), \forall x \in I$ , 則由假設得  $H'(x) = 0$ . 另由平均值定理知對某固定實數  $x_0 \in I$  有另一實數  $c$  介於  $x$  與  $x_0$  之間滿足

$$H(x) - H(x_0) = H'(c)(x - x_0) = 0.$$

可見  $H(x) = H(x_0), \forall x \in I$ . 亦即得證  $F(x) = G(x) + C, \forall x \in I$ , 其中  $C = H(x_0)$ . 註; 此例表示導函數相等之兩函數, 彼此之間差恆為一常數項, 都稱為該導函數之反導(antiderivatives).

**附記:** 平均值定理與高中數學所學的除法定理做比較

將平均值定理之結論改寫成

$$f(b) = f'(c)(b - a) + f(a) \text{ 或 } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

時, 是不是跟高中數學裡所學的多項式除法定理或因式定理(依次)

$$f(b) = Q(b)(b - a) + f(a) \text{ 或 } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

很類似? 其中只是把除法所得的商式  $Q(b)$  改成導數  $f'(c)$  而已. 不過, 後者之  $f$  須為多項式, 非一般函數就是了. 雖然一般實函數沒有所謂的除法定理, 但我們是否可以加以推廣來設想呢? 當  $f(a) = 0$  時, 由剩餘定理知, 多項式  $f(x)$  含有因式  $(x - a)$ ; 同樣的, 透過平均值定理, 廣義地說, 一般實函數  $f(x)$  亦含有 '因式'  $(x - a)$ , 當  $f(a) = 0$  時. 例如  $f(x) = \sin x$ , 則由  $f(0) = 0$  知  $f(x) = \sin x$  含  $x - 0$  之因子. 此由平均值定理得到驗證:  $\sin x = (x - 0) \cos c$ , 其中  $c \in (0, x)$  或  $(x, 0)$ .

讀者都知道多項式的除法定理用處很廣, 微積分裡的平均值定理亦不遑多讓.

### 3° Taylor 公式

這是平均值定理延伸到高階的情況.

#### Taylor Formula with Error Term

If  $f$  has derivatives of all orders in an open interval  $I$  containing  $a$ , then for each positive integer and for each  $x \in I$ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n(x)$$

is called the Taylor Formula with Error Term, where

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1},$$

called *error term*, for some  $c$  between  $a$  and  $x$ .

意即, 若  $f$  在開區間  $I$  (含  $a$ ) 上有各階導數, 則對任予正整數  $n$  且對各  $x \in I$ , 下等式 (稱為 Taylor 公式) 成立:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1},$$

(稱為誤差項,) 而  $c$  為介於  $a$  與  $x$  之間之適當實數.

Taylor 公式中除掉誤差項而得的多項式便稱為 *Taylor 多項式 (Taylor polynomial)*, 此多項式可作為  $f(x)$  的  $n$  次近似量 (*n-th Approximate*.) 一般而言, 當  $n$  ( $n > 1$ ) 時,  $n$  次近似量當然會比一次近似量似量精確 (誤差會小多多). 不過, 需多花時間計算就是了.

定理證明 仿照平均值定理之證明進行. 令

$$F(x) = f(b) - \left\{ f(x) + \frac{f'(x)(b-x)}{1!} + \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(b-x)^3 \right. \\ \left. + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} \right\} - \frac{k}{n!}(b-x)^n.$$

其中常數  $k$  由等式

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \\ + \frac{k}{n!}(b-a)^n \text{ --- --- --- } (*)$$

中的  $k$  決定. 今對  $F(x)$  取導, 經化簡整理後得

$$F'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + \frac{k}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}$$

另外, 易知  $F(a) = F(b) = 0$ , 故由最大最小存在定理得有  $c \in (a, b)$  使  $F'(c) = 0$ . 由此得  $k = f^{(n)}(c)$  將此代入上面 (\*) 式中即得證 Taylor 定理. (須把  $b$  換成  $x$ .)

註: 在數學上常喜歡把複雜的函數想辦法變成比較簡單的函數來近似 (即所謂以簡御繁). 像 Taylor 定理就是一例, 試著用多項式函數來近似一般實函數. 除了有誤差項之外, 利用多項式函數來掌握一般函數應該容易不少. (餘請參考第七章 Taylor 級數.)

## 5.7 導數之各種應用

### 1° 實函數之圖形描法 (Curves Sketching)

有了實函數的微分法後, 對函數之圖示一曲線一的描法幫助很大, 對曲線的結構有了齊全的掌握, 不像高中數學所學的只能描幾個點來描出曲線所可比擬.

### 描法總結 (Summary of the Method)

圖示實函數之圖形不外一些常識及經驗. 不過下示步驟對函數之圖示不無小助.

## Step 1: Precalculus Analysis

- (i) Check the *domain* and *range* of the function to see if any regions of the plane are excluded.
- (ii) Test for *symmetry* with respect to y-axis and the origin. (Is the function even or odd?)
- (iii) Find the *intercepts*. (截距)

## Step 2: Calculus Analysis

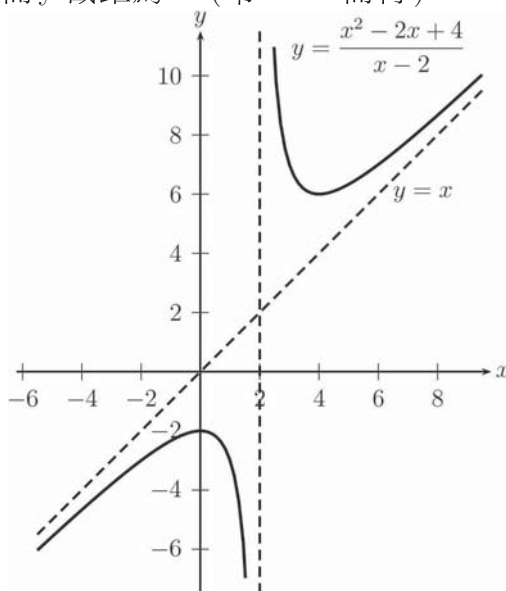
- (i) Use the first derivative to find the critical points and to find out where the graph is *increasing* and *decreasing*.
- (ii) Test the critical points (臨界點 (即主要之點)) for *local maxima* and *minima*.
- (iii) Use the second derivative to find out where the graph is *concave up* (凹向上) and *concave down* (凹向下) and to locate *inflection points*. (反曲點或拐點)
- (iv) Find the *asymptotes* (漸近線)

Step 3: Plot a few points (including all critical points and inflection points).

Step 4: Sketch the graph.

例 1 試描  $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$  之圖形.

解 i) 此方程式所代表的函數既非偶亦非奇函數故無對稱性可言. 所予方程式亦無 x-截距 (因分子無實根.) 而 y-截距為  $-2$  (令  $x = 0$  而得).



ii) 有垂直漸近線  $x = 2$  ( $\because \lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$ ); 也有斜漸近線  $y = x$  ( $\because y = x + \frac{4}{x-2}$ )

iii)

$$y' = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}; y'' = \frac{8}{(x-2)^3}$$

iv) 綜合以上得: 以主要點(即臨界點(critical points))為基準:

$x$	$\cdots$	0	2	4	$\cdots$
$y$	-	-2	$\pm\infty$	6	+
$y'$	+	0	$\pm\infty$	0	+
$y''$	-	-	$\pm\infty$	+	+

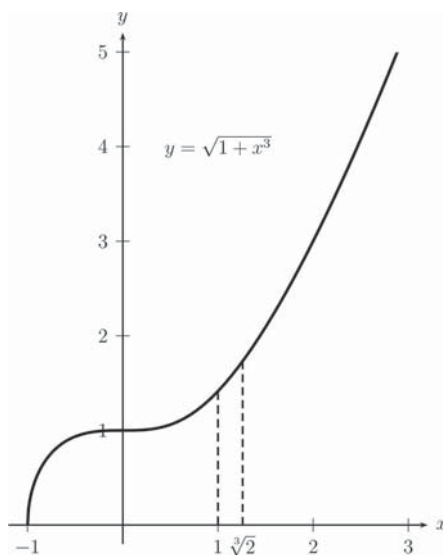
例2 試描  $y = \sqrt{1+x^3}$  之圖形.

解 i) 範圍:  $1+x^3 \geq 0$ , 所以  $x \geq -1$ ; 無對稱性.

ii)  $y' = \frac{3x^2/2}{\sqrt{1+x^3}}, y'' = \frac{3x}{\sqrt{1+x^3}} - \frac{9x^4}{4(\sqrt{1+x^3})^{3/2}}$

iii)

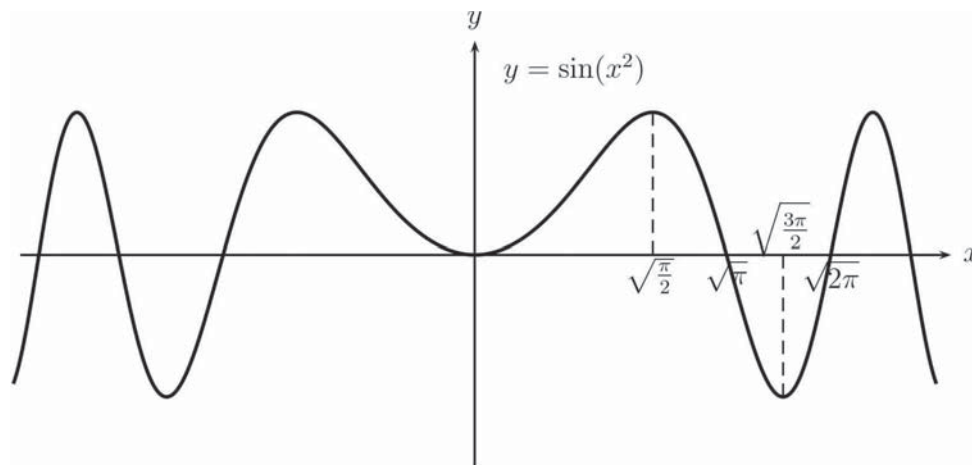
$x$	-1	0	1	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$
$y$	0	1	$\sqrt{2}$	+	+
$y'$	$+\infty$	0	+	+	+
$y''$	-	0	+	0	-



例3 試描  $y = \sin(x^2)$  之圖形.

解 已知  $y = \sin x$  之圖形為正弦曲線, 以  $2\pi$  為週期, 最大值為 1 最小值  $-1$  之平滑曲線.

至於  $y = \sin x^2$  之圖形約略可由正弦曲線來描, 只是不再具週期性, 但在  $x$  軸上穿過  $0, \sqrt{\pi}, \dots$ .



## 2° 不定型 (Indeterminate Forms) 問題的解決

求極限時, 常會碰到  $\frac{0}{0}$  之型, 此在微積分上稱之為不定型, 意即它根本不表一極限值, 是錯用極限之商律而得的. (記住, 分母的極限不可為 0, 除非所予極限不存在.) 欲解決此問題, 只須記住所予式之分子分母必含公因子 (因會出現 0 之故.) 是故只要先行約去公因子即可避免不定型之出現. 此亦為下示之羅必達法則的主意所在.

### 羅必達法則 (L'Hôpital's Rule)

設  $f, g$  為兩在  $c$  處可微分的實函數, 且  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ . 則

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

, 只要後者的極限存在時. (亦即不會再出現不定型  $\frac{0}{0}$  之意, 最後結果如出現  $\pm\infty$  亦算解決了不定型.)

法則證明 須知由假設  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$  易知  $f(x)$  與  $g(x)$  應含有 '因式'  $(x - c)$  故在求極限之前須先行約去. 這些特性都可藉由導數平均值定理得證. 如下

所示.(分子分母分別利用平均值定理)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(\xi_1)(x-c)}{g'(\xi_2)(x-c)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},\end{aligned}$$

其中  $\xi_1, \xi_2$  為介於  $x, c$  之間的適當實數.

須知上示不定型只是許多不定型之一而已. 不定型尚有  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \infty^0, 1^\infty, 0^\infty$  等等. 它們解決之道, 均可比照羅必達法則進行. 請參考下面諸例. 又此法則仍有效, 就是其中的  $c$  換成  $\pm\infty$  時.

**例 1** 試求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$ .

**解**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$  直接分子分母取極限時得  $\frac{0}{0}$  型, 故可施用羅必達法則. 是以,  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = -0.$

**例 2** 試求  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x}$ .

**解**  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x}$  直接分子分母取極限時得  $\frac{\infty}{\infty}$  型, 故亦可施用羅必達法則. 是以,  
 $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin x = 1.$

**例 3** 試求  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ . (屬  $\infty - \infty$  之不定型)

**解**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$  直接分項取極限時得  $\infty - \infty$  型, 亦屬不定型之一. 惟在施用羅必達法則前須先將所予式化成單一分數型. 是以,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1\end{aligned}$$

註 1: 不定型  $\infty - \infty$  中之兩  $\infty$  未必屬同一等級, 故差未必為零. 讀者試想想看: 當  $x \rightarrow 1$  時,  $\ln x$  與  $x-1$  何者比較快接近 0? 或者說  $\frac{1}{\ln x}$  與  $\frac{1}{x-1}$  哪一個趨于  $\infty$  比較快? 結果是  $\frac{1}{\ln x}$  快一步.

註2:由上易知,亦請參照p.93之5° ii),對任意足夠大的自然數 $n$ 來說, $\ln n < n^\alpha$ ,其中 $\alpha$ 為與 $n$ 無關之任予正實數.同理,對任意足夠大的自然數 $n$ 來說, $n^\alpha < e^n$ ,其中 $\alpha$ 為與 $n$ 無關之任予正實數.這些特性在處理有關級數之收斂與否時,是很好的對策之一.(請參見p.193例4.)

$$(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{e^n} = 0).$$

### 有了 $f'$ 及 $f''$ 回頭看 $f$

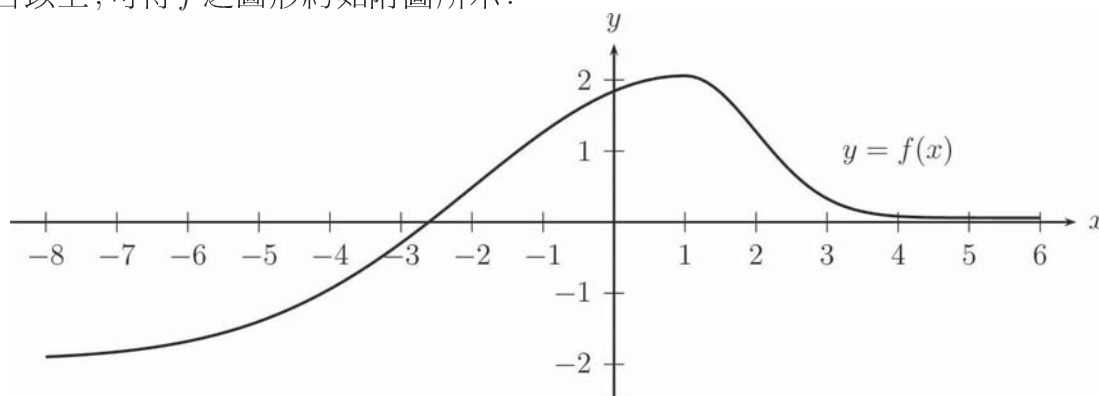
給了函數 $f(x)$ 之一階導數 $f'$ 及二階導數 $f''$ ,讀者能推想回去 $f(x)$ '長'得怎樣嗎?須知很多時候,是先知到函數 $f(x)$ 之一階導數 $f'$ 或二階導數 $f''$ ,再回頭求 $f(x)$ 的.希讀者多練習.

例 試描 $f$ 之可能圖形當下列性質滿足時.

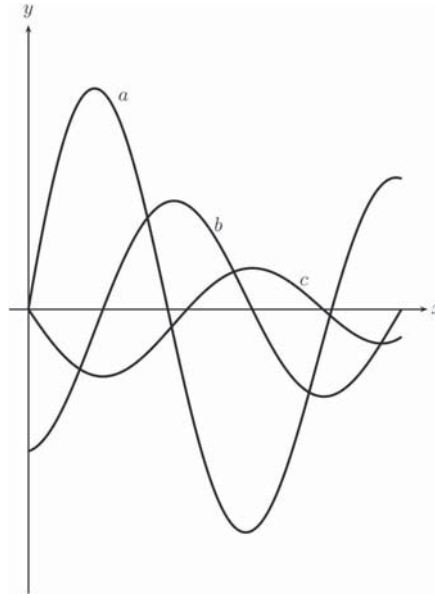
- i)  $f'(x) > 0$ 在 $(-\infty, 1)$ 上,  $f'(x) < 0$ 在 $(1, \infty)$ 上
- ii)  $f''(x) > 0$ 在 $(-\infty, -2)$ 及 $(2, \infty)$ 上,  $f''(x) < 0$ 在 $(-2, 2)$ 上
- iii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

解 由條件i)知 $f$ 在 $(-\infty, 1)$ 上遞增,在 $(1, \infty)$ 上遞減.而由條件ii)知 $f$ 在 $(-\infty, -2)$ 及 $(2, \infty)$ 上凹向上;在 $(-2, 2)$ 上凹向下.又由條件iii)知 $f$ 之圖形有水平漸近線 $y = -2$ 及 $y = 0$ .

綜合以上,可得 $f$ 之圖形約如附圖所示.



例2 附圖是由三曲線組成.已知它們是函數 $f$ 及 $f'$ ,  $f''$ 之圖形.試指出何者為 $f$ 之圖形?



解 (c) 為  $f$  之曲線。(注意若干關鍵點, 如發生極值之點以及反曲點之發生處. 附註: (b) 表  $f'$  之曲線)

有了導數的概念後回頭看極限的問題

在  $c$  處有導數之函數亦必有極限, 即若  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-l}{x-c}$  存在, 則  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ . 蓋  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - l) = \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \frac{f(x)-l}{x-c} = \lim_{x \rightarrow c} (x - c) \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-l}{x-c} = 0 \cdot \text{定數} = 0$ . (注意,  $l$  未必等於  $f(c)$ , 而此處之導數定義成  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-l}{x-c}$ .) 反之, 有極限的地方未必有導數. 如  $f(x) = |x|$  當  $x = 0$  時. 須知以上所示都在顯示可導必有極限的說法.

舉例來說, 特殊極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  之驗證: 可視為  $\sin x$  在 0 處的導數, 即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos x|_{x=0} = \cos 0 = 1$ . 確無誤; 或利用平均值定理知  $\sin x$  必含有 '零因式'  $(x - 0)$  蓋  $\sin x = (x - 0) \cdot \cos c$ , 其中  $c$  為介於 0 與  $x$  之間之實數.

另外, 如  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  亦可視為  $\ln(1+x)$  在 0 處的導數值, 即  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = 1/(1+x)|_{x=0} = 1/(1+0) = 1$  而得到驗證. 亦可利用平均值定理驗證得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+c} x}{x} = \lim_{c \rightarrow 0} \frac{1}{1+c} = 1$ . 或利用平均值定理知  $\ln(1+x)$  必含有 '零因式'  $(x - 0)$  蓋  $\ln(1+x) = (x - 0) \cdot \frac{1}{1+c}$ , 其中  $c$  為介於 0 與  $x$  之間之實數.

不過, 在此須提醒讀者的是, 先有極限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , 才有導數  $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$ . 千萬不可倒果為因.

一般而言, 相對極限是一般極限的特例, 比一般極限更精闢透析所予函數之性質. 讀者不妨從相對極限來設想一般極限的尋求. 如下所示.

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - l) = \lim_{x \rightarrow c} (x - c)^\alpha \frac{f(x) - l}{(x - c)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow c} (x - c)^\alpha \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - l}{(x - c)^\alpha}, \text{ for some real } \alpha > 0,$$

其中第二個等號未必成立.

i) 當  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - l}{(x - c)^\alpha}$  存在時, 則顯然第二個等號成立, 並可得  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ . (此時實即上示可導必有極限之意, 其中  $\alpha = 1$  之情況.)

ii) 當  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - l}{(x - c)^\alpha}$  不存在但在  $c$  之附近有界時, 則顯然第二個等號亦成立, 並可得  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ . (此時實即函數未必可導但仍會有極限的情況.)

### 相對極限的另一解讀

承續上一章的概念 (參照 p.82 a), 在此跟相對極限做一比較. 相對極限

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{(x - c)g(x)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} g(x),$$

其中等式  $f(x) - f(c) = (x - c)g(x)$  就是由極限  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$  之關係所蘊含的. 在上一章中  $g(x)$  雖未清楚交代其身份, 但由上等式之末等號推知它就是  $f(x)$  在  $c$  處之導數 (當導數存在時). 讀者請從此回想上一章所述, 應更能理解求極限之涵意. 由此亦可推知相對極限比起一般極限要更細膩, 是不?

相對極限也可以解讀成是在建立初等函數之因式定理—延伸多項式之因式定理. 一般而言,  $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$  不像當  $f(x)$  是多項式時, 可進一步化簡. 但取其極限且有了導數 (當極限存在時) 後, 可透過平均值定理建立了可微分函數之因式定理:  $f(x) - f(c) = f'(\bar{c})(x - c)$ .

分析學 (analysis) 是數學的一部門, 專門研究實函數的性質, 它就是設法分解所予函數成因式狀態, 以方便探討其特性. 微積分就是分析學之初步.

## 5.8 本章統合

本章定義了實函數的導函數, 它是對自變數的一種變化率. 它也是一種極限, 屬相對極限. 有了導函數的概念後, 就可以局部的 (locally) 知悉該實函數的一些特性, 如有界性、增減性、線性近似性等等, 分述如下.

i) 可微分性 (differentiability): 亦即相對極限的存在性. 須知所予函數在某點的相對極限未必存在. 一旦存在時, 則可引發該函數諸多其他特性如下所示, 故以可微分性稱呼之, 以方便後面的敘述.

ii) 局部增減性 (monotonicity): 若  $f(x)$  在  $c$  處可微分時, 亦即  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  存在時, 茲以  $f'(c)$  表示, 則當  $f'(c) > 0$  時, 按極限之定義知必有  $c$  之某鄰域  $(c - \delta, c + \delta)$  使  $f(x)$  在其中遞增. (因  $f(x) - f(c)$  與  $x - c$  在該鄰域中同號.) 同理, 當  $f'(c) < 0$  時, 按極限之定義知必有  $c$  之某鄰域  $(c - \delta, c + \delta)$  使  $f(x)$  在其中遞減. (因  $f(x) - f(c)$  與  $x - c$  在該鄰域中異號.)

註: 可應用到極值檢定法、一對一檢定法、凹性的檢定法.

iii) 線性近似性 (linear approximate): 若  $f(x)$  在  $c$  處可微分時, 亦即  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$  存在時, 茲以  $f'(c)$  表示, 則按極限之定義知必有  $c$  之某鄰域  $(c - \delta, c + \delta)$  使  $f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c)$ . (其中右側為  $x$  之一次式, 故稱之為  $f(x)$  之線性近似式.)

iv) 局部有界性 (local boundedness): 由線性近似性易得  $f(x)$  為局部有界,  $\forall x \in (c - \delta, c + \delta)$ :  $|f(x)| < f(c) + |f'(c) \cdot 1|$ , 其中不妨取  $\delta = 1$ .

v) 瞬間平均性 (instantaneous average): 某瞬間平均值可等於整段時間的平均值. (MVT) 此瞬間平均值相當於多項式除法中的商 — 除法的廣義解讀.

相對極限的可能情況:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \begin{cases} \text{存在且} = f'(c), \text{當} x \rightarrow c \Rightarrow f(x) \rightarrow f(c), \text{且} \\ \quad \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{時} \text{--- (i);} \\ \text{不存在且} = \infty, \text{當} x \rightarrow c \Rightarrow f(x) \rightarrow f(c) \text{時} \text{--- (ii);} \\ \infty \quad \text{當} x \rightarrow c \Rightarrow f(x) \not\rightarrow f(c) \text{時} \text{--- (iii);} \\ \text{不存在但} \neq \infty, \text{當} x \rightarrow c \Rightarrow f(x) \rightarrow f(c), \text{但} \\ \quad \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \neq \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \text{時} \text{--- (iv)} \end{cases}$$

註: 上列各式所代表之意義?

(i) 表函數式  $f(x) - f(c) \approx f'(c)(x - c)$ , 即  $f(x) - f(c)$  近似地含有 '因式'  $(x - c)$ . (曲線在  $x = c$  處有切線可引.)

(ii) 表曲線  $y = f(x)$  在  $x = c$  處有垂直切線可引. (如曲線  $y = x^{2/3}$  及  $y = x^{1/3}$  當  $x = 0$  時;)

(iii) 表曲線  $y = f(x)$  在  $x = c$  處無切線可引. (如曲線在  $x = c$  處有斷點時.)

(iv) 表曲線  $y = f(x)$  在  $x = c$  處無切線 (因左右斜率不同之故) 可引. (如曲線  $y = |x|$  在  $x = 0$  處有尖點時.)

## 5.9 練習題

1. 從導數的定義, 求下列各函數在指定點的導數.

a)  $f(x) = \frac{1}{x-2}; x = 2$     b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}; x = 1$     c)  $g(s) = \cos \pi s \sin^2 \pi s; s = 1/2$ .

d) 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-4} & x \neq -2 \\ \frac{1}{-4} & x = -2 \end{cases}; x = -2.$$

2. 從導函數的定義, 求下列各函數之導函數

a)  $f(x) = x^2 - 3x$     b)  $f(z) = \sqrt{2z - 3}$     c)  $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x + 1}$

d) 令

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2-4} & x \neq -2 \\ \frac{1}{-4} & x = -2 \end{cases}$$

3. 令

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

問  $f(x)$  在  $x = 0$  處可微分嗎? 又問  $f(x)$  連續嗎?

4. 利用各種求導運算律(對數微分法), 求下列各函數之導函數.

a)  $f(x) = \sqrt[3]{5x - 2}$     b)  $f(x) = (x^2 + 3x - 6)^{1/3}$     c)  $f(x) = 3^{2x+1}$

d)  $f(x) = x^{x^2}$

5. 令

$$f(x) = \begin{cases} mx + b & \text{當 } x \leq 2 \text{ 時} \\ x^2 & \text{當 } x > 2 \text{ 時} \end{cases}$$

試決定  $m, b$  之值可使  $f$  處處可微分.

6. 令

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

問  $f(x)$  在  $x = 0$  處可微分嗎? 又問  $f'(x)$  連續嗎? 求  $f''(0)$  之值.

7. 利用隱求導法求下列各函數之導函數.

a)  $x^2y - 1 = xy^2$     b)  $\cos(xy^2) = y^2 + x$     c)  $x^3 + y^3 = 3xy + 1$   
 d)  $e^{x+y} = 1 - xy$

8. 求下列各函數的微分

a)  $y = (2x + 3)^{-4}$     b)  $y = (1 - e^{5x}) \ln x$     c)  $y = (1 + \tan x)^3$   
 d)  $s = \sqrt{(t^2 - \cot t + 2)^3}$

9. 試求下列各函數在所予點的線性近似值.

a)  $\sqrt{x+1}$  在  $a=3$     b)  $\ln(x+1)$  在  $a=0$     c)  $x \cos x$  在  $a=1$

10. 設函數  $f$  可微分. 依據線性近似法可得  $f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$ . 今令  $\varepsilon(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$ , 試證

a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = 0$ .

11. 試利用平均值定理證明

a)  $|\tan x - \tan y| \geq |x - y|, \forall x, y \in (-\pi/2, \pi/2)$ .

b)  $\frac{\pi}{4} - \frac{1-x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{4} - \frac{1-x}{2}$ , 當  $0 < x < 1$  時.

c)  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ , 當  $-1 < x < 0$  或  $x > 0$  時.

12. 下列函數何以在所予區間上不滿足平均值定理的假設?

i)  $f(x) = |x-1|, [0, 3]$     ii)  $f(x) = x^{1/3}, [-1, 1]$

13. 利用平均值定理及函數之增減性證明(絕對不等式部分)

a)  $2/\pi < \sin \theta / \theta < 1$  當  $0 < \theta < \pi/2$  時.

b)  $p(x-1) < x^p - 1 < px^{p-1}(x-1)$  當  $1 < x, 1 < p$  時.

c)  $\frac{m(x-1)}{x^{1-m}} < x^m - 1 < m(x-1)$  當  $0 < m < 1, 1 < x$  時.

14. 利用  $L'Hopital$  法則, 求下列各極限值.

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{\tan 3x}$     b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(x+1) - 1}{x^2}$     c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

15. 試描滿足下列所有性質之函數  $F$  的圖形:

a)  $F$  處處連續

b)  $F(-2) = 3, F(2) = -1$ ;

c)  $F'(x) = 0$  當  $x > 2$  時

d)  $F''(x) < 0$  當  $x < 2$  時

16. 試描滿足下列所有性質之函數  $F$  的圖形：

a)  $F$  處處連續

b)  $F$  有週期  $\pi$

c)  $0 \leq F(x) \leq 2, F(0) = 0, F(\pi/2) = 2$ ;

d)  $F'(x) > 0$  當  $0 < x < \pi/2$  時,  $F'(x) < 0$  當  $\pi/2 < x < \pi$  時;

e)  $F''(x) < 0$  當  $0 < x < \pi$  時.

17. 設  $f(x) = x^2 + 2x$  並令  $g(t) = t^2 \sin \pi/t + t, t \neq 0; g(0) = 0$ . 若令  $F(t) = f \circ g(t)$ . 試求  $F'(0)$ .

18. 若在區間  $[a, b]$  上  $f'(x) \neq 0$  則  $f$  在所予區間上為一對一函數. 試證之. 並問逆命題成立否?

19. 試證: 若  $f(x)$  在區間  $I$  上具  $f'(x) = 0$ , 則  $f(x)$  在  $I$  上為常數函數.

20. 令

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \text{ 時} \\ 0 & x = 0 \text{ 時} \end{cases}$$

試證  $f(x)$  之任何階導數均處處存在.

21. 設  $xy^2 + 2y(x+2)^2 + 2 = 0$ .

a) 若  $x$  從  $-2.00$  變到  $-2.01$  且  $y > 0$ , 問  $y$  的近似變動情況如何?

b) 若  $x$  從  $-2.00$  變到  $-2.01$  且  $y < 0$ , 問  $y$  的近似變動情況如何?

22. 令  $f(x) = x \tan^{-1} 1/x$  當  $x \neq 0$  時, 且  $f(0) = 0$ . 問  $f$  在  $x = 0$  處連續嗎? 又問  $f$  在同一地方可微分嗎?

23. 考慮下列諸函數:

$$f_0(x) = \cos x - 1$$

$$f_1(x) = \sin x - x$$

$$f_2(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$f_3(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3$$

$$f_4(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4$$

$$f_5(x) = \sin x - x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5$$

已知  $f_1'(x) = f_0(x)$  且  $f_0(x) \leq 0$  當  $x > 0$  時. 可見  $f_1(x)$  遞減當  $x$  增加時, 且由於  $f_1(0) = 0$ , 故  $f_1(x) < 0$  當  $x > 0$  時. 其次, 須知  $f_2'(x) = -f_1(x)$ . 試說明可得  $f_2(x) > 0$  當  $x > 0$  時. 按此方式, 試證: 對  $x > 0$ ,

$$x - \frac{1}{6}x^3 < \sin x < x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$$

$$\text{且 } 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{120}x^6 < \cos x < 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4.$$

問可不可加以一般化?

24. 設  $a, b, c, d$  為定數, 若

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + \sin bx + \sin cx + \sin dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8$$

求  $a + b + c + d$  之值.

### 第五章之習題解答

1.a) 因所予函數在  $x = 2$  沒定義, 故亦無導數可言.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{5}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+4}+\sqrt{5})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{5}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } g'(1/2) &= \lim_{s \rightarrow 1/2} \frac{g(s)-g(1/2)}{s-1/2} = \lim_{s \rightarrow 1/2} \frac{\cos \pi s \sin^2 \pi s}{s-1/2} \\ &= \lim_{s \rightarrow 1/2} \frac{-\sin \pi(s-1/2) \lim_{s \rightarrow 1/2} \sin^2 \pi s}{s-1/2} = -1 \cdot \pi \cdot 1^2 = -\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{x+2}{x^2-4} + \frac{1}{4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4+(x-2)}{4(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{4(x-2)} = \frac{-1}{16}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2. a) } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2-3(x+h)-x^2+3x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh+h^2-3h}{h} = 2x-3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(z+h)-3}-\sqrt{2z-3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(z+h)-3-(2z-3)}{h(\sqrt{2(z+h)-3}+\sqrt{2z-3})} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2z-3}} = \frac{1}{\sqrt{2z-3}}, z > 3/2. \end{aligned}$$

$$\text{c) } g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+h)^2-3(x+h)+7+(x+h)+1}{x+h+1} - \frac{x^2-3x+7}{x+1}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^2 - 3(x+h) + 7](x+1) - (x^2 - 3x + 7)(x+h+1)}{h(x+h+1)(x+1)} = \frac{x^2 + 2x - 10}{(x+1)^2}, x \neq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{d) } f'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{x+2}{x^2-4} + \frac{1}{4}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4+(x-2)}{4(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{4(x-2)} = \frac{-1}{16}. \end{aligned}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h-2} - \frac{1}{x-2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x-2-(x+h-2)}{(x+h-2)(x-2)h} = \frac{-1}{(x-2)^2}, \text{ 當 } x \neq -2 \text{ 時.}$$

3.  $f(x)$  在  $x=0$  處不可微分. ( $\because f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin 1/x$  不存在.  
 $f(x)$  處處連續. (因  $f(x)$  在  $x=0$  處連續.) ( $\because |x \sin 1/x| \leq |x|$ .)

$$4. \text{ a) } f'(x) = \frac{5}{3\sqrt[3]{(5x-2)^2}}$$

$$\text{b) } f'(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 3x - 6)^{-2/3}(2x + 3)$$

$$\text{c) } f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{(2x+1)\ln 3}) = e^{(2x+1)\ln 3} \cdot 2 \ln 3 = 2 \cdot 3^{2x+1} \ln 3.$$

$$\text{d) } f'(x) = \frac{d}{dx}(e^{x^2 \ln x}) = e^{x^2 \ln x}(2x \ln x + x) = x^{x^2}(2x \ln x + x).$$

5. 只須在  $x=2$  處查證  $f$  可微分即足,

$$f'(2) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(mx+b) - (2m+b)}{x-2} = m \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4 + (4 - 2m - b)}{x-2} = 4 \text{ 因須存在, 故 } 4 - (2m + b) = 0 \end{cases}$$

所以  $m=4, b=-4$ .

註: 由可微分必連續知  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$  由此亦得  $4 = 2m + b$ .

$$6. \text{ i) 是可微分; } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin(1/x) - 0}{x-0} = \lim x^2 \sin(1/x) = 0.$$

ii)  $f'(x)$  為連續函數. (因  $f$  為可微分函數.)

iii)  $f''(0)$  不存在. (因  $f'(x) = 3x^2 \sin(1/x) - x \cos(1/x)$ .)

$$7. \text{ a) } y' = \frac{y^2 - 2xy}{1 - 2xy}, 1 - 2xy \neq 0$$

$$\text{b) } y' = \frac{1 - \sin(xy^2)y^2}{2y - 2xy \sin(xy^2)}, 2y - 2xy \sin(xy^2) \neq 0.$$

$$\text{c) } y' = \frac{3y - 3x^2}{y^2 - 3x}, y^2 - 3x \neq 0.$$

$$\text{d) } y' = \frac{-xye^{x+y}}{e^{x+y} + x}, e^{x+y} + x \neq 0.$$

$$8. \text{ a) } dy = -8(2x+3)^{-5} dx \quad \text{b) } dy = [(1 - e^{5x})1/x - 5e^{5x} \ln x] dx$$

$$\text{c) } dy = 3(1 + \tan x)^2 \sec^2 x dx \quad \text{d) } dy = \frac{3}{2} \sqrt{t^2 - \cot x} + 2(2t + \csc^2 t) dt$$

$$9. \text{ a) } L(x) = \frac{1}{2.2}(x - 3)$$

b)  $L(x) = 0 + 1(x - 0)$

c)  $L(x) = \cos 1 + (x - 1)(\cos 1 - \sin 1)$

10. a)  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x+h) - f(x) - f'(x)h) = \lim_{h \rightarrow 0} h \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right] = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right] = 0.$

b)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right] = 0$ , 其中最後等式是得自  $f$  可微分.

11. a)  $\left| \frac{\tan x - \tan y}{x - y} \right| = |\sec^2 \xi| \geq 1, \forall x, y \in (-\pi/2, \pi/2), \exists \xi \in (x, y) \text{ or } (y, x)$

b)  $\frac{\tan^{-1} x - \pi/4}{x - 1} = \frac{1}{1 + \xi^2}, \exists \xi \in (x, 1), 0 < x < 1.$

故  $\frac{1}{1+1} < \frac{\tan^{-1} x - \pi/4}{x - 1} < \frac{1}{1+x^2}.$

c)  $\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{1+x-1} = \frac{1}{1+\xi}$ , 其中  $0 < \xi < x$  或  $-1 < \xi < x < 0$

12. i)  $f(x)$  在  $x = 0$  處不可微分.

ii)  $f(x)$  在  $x = 0$  處不可微分.

13. a)  $\frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{\sin \theta - \sin 0}{\theta - 0} = \cos \xi, \xi \in (0, \theta), \theta < \pi/2.$

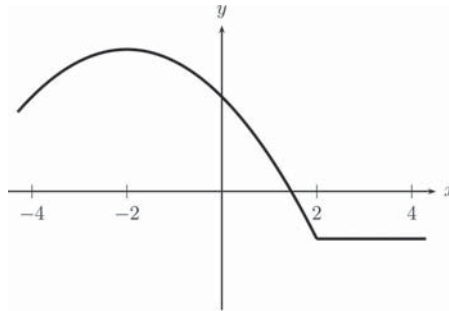
因  $\cos \xi$  在  $(0, \pi/2)$  上遞減, 故  $\frac{1}{\pi/2} < \sin \theta / \theta < 1.$

b)  $\frac{x^p - 1}{x - 1} = p\xi^{p-1}, x > 1, x > \xi > 1, p > 1$  (由平均值定理.)

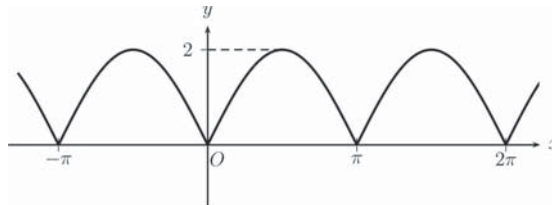
c) 即上小題當  $0 < p < 1$  之情況.

14. a) 1    b) 1    c) 1 (提示:  $x^x = e^{x \ln x}$ )    d) 0 (仿例 3p.138)

15.



16.



$$17. F'(0) = f'(g(0))g'(0) = (2x+2)|_{x=0}1 = 2$$

18. i) 反證如下: 若不一對一, 則  $\exists x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ , 而  $f(x_1) = f(x_2)$  如此則由平均值定理有  $c \in (x_1, x_2)$  使  $f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0$ , 此顯然與假設相違.

ii) 如  $f(x) = x^3$  在  $(-1, 1)$  上一對一, 但  $f'(0) = 0$ .

19. 若不為常數函數, 則  $\exists c \neq x$  使  $f(c) \neq f(x)$ . 但由平均值定理之  $\exists \xi \in (c, x)$  使  $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \neq 0$ , 此顯然又相違.

20.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{e^{-1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/x^2}{e^{1/x^2} - 1/x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^{1/x^2}} = 0 \end{aligned}$$

21. a) 由所予方程式得  $(-2, 1)$  為其上之點. 又由隱微分求導法得  $y' = \frac{-y^2 - 4(x+2)y}{2xy - 2(x+2)^2}$ ,  $y'|_{(-2,1)} = \frac{1}{4}$ . 可見  $\Delta y \approx y' \Delta x = \frac{1}{4}(-0.01) = -0.0025$ .

b) 由所予方程式得  $(-2, -1)$  為其上之點. 又由隱微分求導法得  $y' = \frac{-y^2 - 4(x+2)y}{2xy - 2(x+2)^2}$ ,  $y'|_{(-2,-1)} = -\frac{1}{4}$ . 可見  $\Delta y \approx y' \Delta x = -\frac{1}{4}(-0.01) = 0.0025$ .

22. i) 只須查在  $x = 0$  處連續即可.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x \tan^{-1} 1/x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1} 1/x = 0 \cdot \pi/2 = 0 = f(0)$ . 可見  $f(x)$  在  $x = 0$  處連續.

ii)  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan^{-1} 1/x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} (\tan^{-1} 1/x) = \pi/2$ . 可見  $f$  在  $x = 0$  處可微分.

23.  $f_3'(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2 < 0$  (由於  $f_2 > 0$ ), 又因  $f_3(0) = 0$ , 故得  $\sin x > x - \frac{1}{6}x^3$ . 其他同理可得.

$$\begin{aligned} 24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + d \sin bx + \sin cx + \sin dx}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + (bx - \frac{(bx)^3}{6} + \dots) + (cx - \frac{(cx)^3}{6} + \dots) + (dx - \frac{(dx)^3}{6} + \dots)}{3x^2 + 5x^4 + 7x^6} = 8 \end{aligned}$$

可見分子的一次式須為 0, 亦即  $b + c + d = 0$ ,  $a/3 = 8$ , 故得  $a + b + c + d = 24$ .

