第四章

極限法—-單變實函數之零因式概念

內容

4.1 本章宗旨

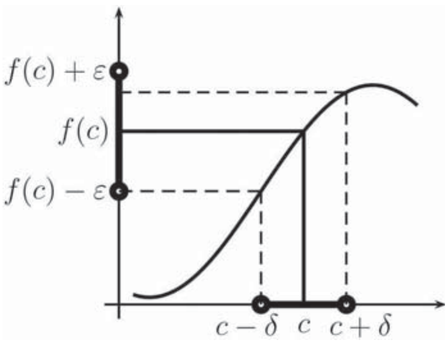
本章專門討論實函數 $f(x)$ 在某處(如在固定實數 c 處)的極限,即 $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ 是否成立的問題及其所衍生之相關性質.
本章屬探討函數 $f(x)$ 被 $x-c$'除'時是否得到剩餘 $f(c)$ 的問題.換言之,$f(x)-f(c)$ 是否含有'零因子'$(x-c)$ 的問題—-亦即多項式因式定理是否可延伸的問題.所謂零因式是指會產生實數0的因式,如 $x\to c$ 表 $x-c\to 0$,則型如 $(x-c)^\alpha$ 者都算是零因式(因均能使 $x\to c$ 成立者),其中 α 爲適當正數,最常見者爲 $\alpha=1$.

4.2 認識實函數之極限

極限之定義

Let $f(x)$ be a real function defined on some interval I containing c. We say that the given function$f(x)$ has a limit l at c if as x approaches c,$f(x)$ approaches l,denoted by $\lim_{x\to c} f(x) = l$,where l is a well-defined definite real number and c is a fixed real number in I.
意即,令$f(x)$爲定義于區間I(包含c點). $f(x)$稱之爲在c有極限l是當x趨近于c時,x所對應的函數値$f(x)$會趨近定值l.如此之特性常以$\lim_{x\to c} f(x) = l$表示.換成數學的式子來表示時,則爲

$$若|x-c|<\delta,其中\delta爲適當正數,則|f(x)-l|<\varepsilon其中\varepsilon任予正數.$$



比較新的說法是c所對應的適當鄰域$(c-\delta, c+\delta)$須在f之對應下包含於l所對應的任予鄰域$(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$中,其中$\delta, \varepsilon$都是正數,而$\delta$隨$\varepsilon$而變.(參見附圖)
註:鄰域一旦找到時,就不用再分大或小,意即,δ存在即可,是大是小無關緊要.

例 令$f(x) = 3x-1$,則顯然$f(x)$爲一實函數,以$\mathbb{R}$(也是一區間)爲定義域,試求$\lim_{x\to 3} f(x)$.

解 由於x趨近至3,那$3x-1$就會趨近至$3\cdot 3-1=8$.(直覺的設想,當一數接近3時,3倍之是不是接近9呢!)可見$\lim_{x\to 3} f(x) = 8$.

針對此定義,有下列幾點補充:

i) l未必爲$f(c)$,這是初學者容易誤解之處.其反例請參見底下例1.爲何在此特別強調此點,主要是關係著後面即將要討論的有關實函數連續的題材.須知有時候甚至於$f(c)$根本沒定義(即c不在定義域中),如例4所示.至於l怎麼決定呢?請參看如何求極限一欄(p.85)及以下之諸例.

ii) $x \to c$表變數x會落在c的某鄰域(去c者)中之意,爲不等式$0 < |x-c| < \delta$之解集合.亦即x須滿足$0 < |x-c| < \delta$,其中δ爲適當正數.由於一旦有了一個δ之後,比它小的任何正數所對應的不等式亦均可做爲c之鄰域(均可作爲$x \to c$的活動範圍).如此之下,不就有x趨近c之含意嗎?由於注重的是趨近,故剔除$x = c$之情況.惟須知x趨近于定數c不僅僅是指x比c小向右遞增趨近至c,或指比c大向左遞減趨近至c而已,亦可以以交錯方式趨近於c. (δ表適當正數,用意在限制x之變動範圍.)此即一般所謂的雙側極限(two-sided limits),除非另外特別聲明(因有時也會考慮單側極限(one-sided limits)),只是習慣上談極限時常把雙側兩字省略.
另外,$x \to c$也可用實數列來解讀,表示**任何**會趨近c之數列,如$x = c + (-1)^n 1/n$(其中$n \to \infty$).可見函數的極限大致上都可視爲數列之極限來設想.

iii)以後只要看到$\lim_{x\to c} f(x) = l$,一定要認知是指$f(x)$會接近l,條件是x要接近c時.換成比較數學的說法便是對任予正數ε,總可找到適當的正數δ使合乎$0 < |x-c| < \delta$的x,所對應的$f(x)$恆有$|f(x) - l| < \varepsilon$.其中的不等式都是表接近的意思,但x不要等於c(在乎動態(dynamic)行徑之意).請注意,敘述中的正數ε都習慣雖爲任予正數,實際上在乎的是比較小的任予正數.(就是要有接近的意含.)

iv)有時候爲了能使使用更爲寬廣起見,定義中的c與l也可取爲表狀態而非定數的$\pm\infty$.(詳見p.84.例2)

v)實函數的極限具有可代表某鄰域(集團)的概念.因爲l與在c附近的x所對應的$f(x)$都很接近(相差很小之意),所以極限值l可以做爲那些$f(x)$的代表值(好像是一班的'班代表'一樣).大部分的微積分書都注重在求極限值,而忽略求得極限後它所代表的意涵.記住,我們學習極限是要使用極限的概念,而不是反被它所使用.

vi)極限定義的否定敘述?有時候知道定義的反面敘述對於定義的掌握很有幫助.依據上面iii)所述知,極限定義的否定敘述爲:當x趨近c時,$f(x)$不會有極限,數學上的說法爲

$$\begin{aligned}&\sim (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \,\text{such that}\, \forall x \,\text{with}\, |x-c| < \delta, \text{we have}\, |f(x) - l| < \varepsilon)\\ &\quad \equiv (\exists\varepsilon > 0, \text{such that}\, \forall\delta > 0, \exists x \,\text{with}\, |x-c| < \delta, \text{such that}\, |f(x) - l| \not< \varepsilon).\end{aligned}$$

(讀者要注意的是,此處只針對定數l而言,故上敘述不好直接使用在極限不存在之情況.一般要證明極限不存在時,須找兩相異卻能趨近於c的數列使所對應的函數值收斂到不相等的極限值,請參考例4)

vii) 若函數之極限存在,則必唯一.存在不存在之差別何在?有極限亦即表極限會存在之意.茲將證明極限存在之步驟展示如下:

a) $\lim_{x\to c} f(x) = l$ 之情況:反推如下,(主要在找 $|x-c| < \delta$ 中的 δ.)

$$|f(x) - l| = |g(x)||x-c| \le B|x-c| < \varepsilon \Rightarrow |x-c|M < \varepsilon,$$

其中 B 是適當正數,爲 $|g(x)|$ 之上界.至於 $g(x)$ 則爲適當實函數能使上式中等號成立者.(不妨暫取爲 $(f(x)-l)/(x-c)$ 待進一步化簡.另請參考p.140之'有了導數概念後回頭看極限的問題'一欄.)令 $\delta = \varepsilon/B$,即算得證 $\lim_{x\to c} f(x) = l$.如何建立此不等式(即先設法括出因子 $(x-c)$,再找 $|g(x)|$ 之上界.爲求此上界,一般可能須加條件 $|x-c| < 1$.這是容許的,反正 x 會在 c 之附近即足.)這就是學數學的用意所在.(詳見下示例5及6.並參考練習題第16題.)

b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ 之情況:針對此特殊情況,由其定義配出

$$|f(x)| = |x||g(x)| \ge |x|B > M,$$

其中 B 爲 $|g(x)|$ 之下界.令 $M_0 = M/B$,則當 $|x| > M_0$ 時,$|f(x)| > M$,此即算得證 $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.
註:以上諸性質均隱含有因式定理之應用:當 $x-c \to 0$ 時,因 $f(x)-l \to 0$,由因式定理知 $f(x)-l$ 必含有關 $x-c$ 之'零因式',只因 $f(x)-l$ 未必是多項式罷了.(在此不妨把因式定理擴大至一般可微實函數來想,理由見平均值定理(p.132).)另請參考p.90之諸應用例.

例1 令

$$f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{當 } x \ne 1 \text{ 時} \\ 3 & \text{當 } x = 1 \text{ 時} \end{cases}$$

顯然,$\lim_{x\to 1} f(x) = -3 \ne f(1) = 3$.所以所予函數在 $x=1$ 處雖有極限但不等於 $f(1)$.

例2 令 $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$,試求 $\lim_{x\to 1} f(x)$.

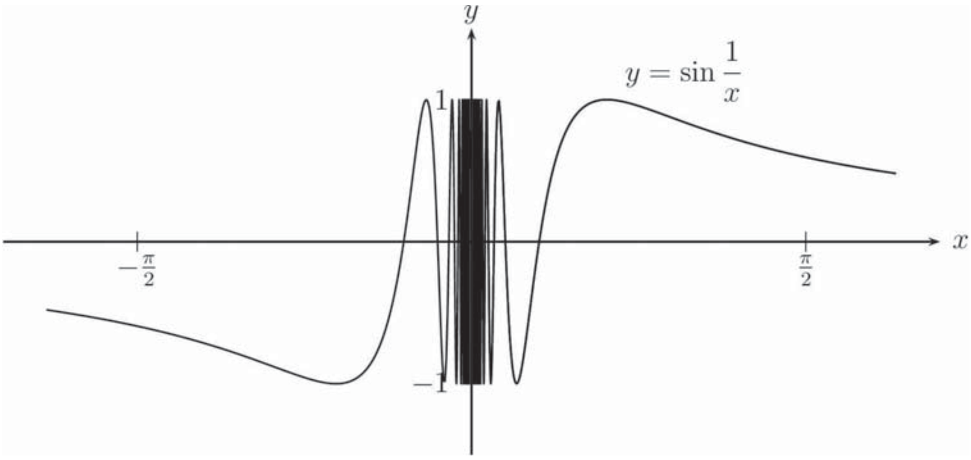
解 須知 $f(x)$ 可進一步化簡爲 $f(x) = x+1$,但 $x \ne 1$.由此可得 $\lim_{x\to 1} f(x) = 1+1 = 2 \ne f(1)$,後者根本沒定義.
註:所予函數爲分式型時,若分子與分母對某數取極限會有0出現,則表它們有公因式,此時得先約去公因式再取極限,如上例所示.另詳見第五章p.137不定型問題.

例 3 令 $f(x) = x^2 - \frac{\cos x}{100000}$, 試求 $\lim_{x\to 0} f(x)$.

解 很多讀者會直觀的認爲 $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$), 其實應爲 $-1/100000$. 儘管後者很小, 但它仍爲不等於 0 之定數.

例 4 試證 $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ 不存在.

解



由極限定義的否定知, 欲證某函數之極限不存在, 須找兩會趨近於 0 之不同數列使所予函數在 0 處之極限不相等.

i) 令 $x = \frac{2}{4n+1}\pi$ 時, 顯然當 $n \to \infty$ 時, $x \to 0$, 而

$$\lim_{x\to 0} \sin 1/x = \lim_{n\to\infty} \sin(4n+1)/2 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

ii) 令 $x = \frac{2}{4n-1}\pi$ 時, 顯然當 $n \to \infty$ 時, $x \to 0$, 而

$$\lim_{x\to 0} \sin 1/x = \lim_{n\to\infty} \sin(4n-1)/2 = \lim_{n\to\infty} -1 = -1.$$

由上知 $\lim \sin 1/x$ 不會趨近於定値, 故函數 $\sin 1/x$ 在 0 處無極限.

例 5 試利用極限的數學定義證明 $\lim_{x\to 1}(x^2 + 3x - 5) = -1$

解說 重點在如何找到定義中的 δ. 利用反推法. 欲證 $\lim_{x\to 1}(x^2+3x-5) = -1$, 即須對任予 $\varepsilon > 0$, 找適當的正數 δ, 使滿足 $|x-1| < \delta$ 之 x 會滿足 $|x^2+3x-5-(-1)| < \varepsilon$. 如

此適當的δ須從不等式$|x^2+3x-5-(-1)|<\varepsilon$反推,從中配出含$|x-1|<\delta$之型,如下示.

$$\begin{aligned}|x^2+3x-5-(-1)|<\varepsilon &\Leftrightarrow |x^2+3x-4|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow |(x-1)(x+4)|<\varepsilon\\ &\Leftrightarrow |x-1|<\frac{\varepsilon}{|x+4|}\\ &\Leftarrow |x-1|<\delta\leqq\frac{\varepsilon}{|x+4|}\end{aligned}$$

須知δ爲ε的函數,其中不可含x,故由上最末不等式知無法直接取$\frac{\varepsilon}{|x+4|}$做爲所要的$\delta$.爲了要避開$x$在此常對$x$另加限制—取$|x-1|<1$.這是容許的,反正$x$在1之附近活動即可.故當$0<x<2$時,使上最末不等式恆成立之$\delta$應爲$\frac{\varepsilon}{2+4}$.(即取使$\frac{\varepsilon}{|x+4|}$之最小值當做$\delta$.)另外,要注意的是最末的箭頭取單箭頭即可,因這是反推的程序.

證 令$\delta=\frac{\varepsilon}{6}$,則由上解說得

$$|x-1|<\delta\Rightarrow|x^2+3x-5-(-1)|<\varepsilon.$$

故由極限定義得證$\lim_{x\to1}x^2+3x-5=-1$.

註:請注意,δ本應取$\min\{1,\varepsilon/6\}$才對,但ε可取較小之正數使$\varepsilon/6<1$.故只取$\varepsilon/6$亦無妨.

例6 試證$\lim_{x\to2}f(x)=-\frac{3}{5}$,其中$f(x)=\frac{x-5}{x^2+1}$.

解 $|f(x)-(-\frac{3}{5})|=|x-2||\frac{3x+11}{5(x^2+1)}|<|x-2|2<\varepsilon$,其中利用$|x-2|<1$使$|\frac{3x+11}{5(x^2+1)}|<2$.(式中分子之$x$以3代入;分母之$x$以1代入.)故當取$\delta=\varepsilon/2$時可推得$|x-2|<\delta\Rightarrow|f(x)-(-3/5)|<\varepsilon$.此亦即得證本例.

註:有時爲了找到正數δ(只跟ε有關,與x無關),須加限x之活動範圍,如本例中的$|x-2|<1$即是,請讀者留意.

另解 直接利用運算律進行亦可得證,如下所示:

$$\lim_{x\to2}\frac{x-5}{x^2+1}=\frac{\lim_{x\to2}(x-5)}{\lim_{x\to2}(x^2+1)}=\frac{-3}{5}.$$

單側極限

單側極限分兩種,分別以$\lim_{x\to c^+} f(x)$表x比c大而趨近於c(一般稱之爲右極限),或以$\lim_{x\to c^-} f(x)$表比c小而趨近于c(一般稱之爲左極限)表示.
當c爲正負無限大之一時,要取的極限自然便屬單側極限.(參考例2)另外,有些函數的定義域爲有限區間,此時若要求在端點的極限,則亦須取單側極限,此即有所謂的端點極限(End Point Limits)的由來.(參考例1)

例1 試求$f(x)=\sqrt{x^2-4}$在2處的極限值.

解 因所予函數的定義域爲$\{x : x \geqq 2 \text{ or } x \leqq -2\}$,所以

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt{x^2-4} = 0.$$

例2 試求$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1}$.

解 $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{\infty} = 0$.

例3 (單側極限)試求$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|}$及$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|}$

解 $f(x)$可進一步化簡成

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{當} x > 0 \text{時} \\ -1 & \text{當} x < 0 \text{時)} \end{cases}$$

可見$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$,而$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-}(-1) = -1$.

4.3 如何求極限?

大部分的微積分書都會有這部分,本書當然不例外.首先須斷定所予函數在所予點是否有極限存在?確定有無極限的方法很多,可試驗性地,取若干個接近欲趨近之實數的數值實際計算看看,也可藉函數之圖示尋得,視所予函數而定.當確定極限存在後,在數學上常須確認,亦即須加以證明,否則難以被接受.在確定有無極限的過程中,若由如下示的運算律,將欲求極限之函數做適當的式之變換,化成基本型之形式,以便找到所要的極限(以若干則已知其極限之基本型做基礎).至於有關較難的基本型$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$及$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$之極限值則須用到所謂的夾擊定理(Squeeze Theorem)(有時候稱爲三明治定理)來確認,詳見(p.88)例1.

極限的各種運算律

設 f,g 爲兩實函數,且它們在 c 處都有極限,則下列運算律成立.

$$\lim_{x\to c}(f+g)(x)=\lim_{x\to c}f(x)+\lim_{x\to c}g(x)$$

$$\lim_{x\to c}(f-g)(x)=\lim_{x\to c}f(x)-\lim_{x\to c}g(x)$$

$$\lim_{x\to c}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}g(x)$$

$$\lim_{x\to c}(f\div g)(x)=\lim_{x\to c}f(x)\div\lim_{x\to c}g(x),\text{但}\lim_{x\to c}g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to c}f(x)},\text{但}\ f(x)>0\ \text{當}\ n\ \text{爲偶數時}$$

設 f,g 爲兩實函數,且可合成,若 $\lim_{x\to c}g(x)=l,\lim_{y\to l}f(y)=m$,則

$$\lim_{x\to c}f\circ g(x)=f(\lim_{x\to c}g(x)).$$

若 $f(x)<g(x),\forall x\in N(c,\delta)$(表 c 的鄰域,亦即爲不等式 $|x-c|<\delta$ 之解,其中 δ 爲適當正數),則

$$\lim_{x\to c}f(x)\leq\lim_{x\to c}g(x).$$

由上諸運算律得知重要概念:通常的代數運算律不因加入取極限(視爲一運算)而有所改變.

運算律成立之證明

只證極限對合成之運算律成立,其餘請讀者自己練習.

證

$$\lim_{x\to c}(f\circ g)(x)=\lim_{x\to c}f(g(x))=\lim_{g(x)\to l}f(g(x))=f(l)=f(\lim_{x\to c}g(x)).$$

其中主要關鍵在 $\lim_{x\to c}$ 改換成 $\lim g(x)\to l$.這是假設之一即 $\lim_{x\to c}g(x)=l$ 得來的.另外,l 一定要在 f 之定義域中.

註 1: 上列性質當 c 換成 $\pm\infty$ 時,也都成立,另外,把'有極限'改成 ∞ 時,只要不會產生 $\infty-\infty$ 或 $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ 之型都還是成立的.
註 2: 上列諸性質對單側極限亦都成立.

有了上面的性質相當於告知取極限也是一種運算.因所有的代數函數都可由變數x經代數運算有限次運算而得,故可透過上面的運算性質得知它們在它們的定義域中都有極限存在.

求極限之步驟

如何決定所予函數之極限,可說是學習極限的第一課題.本無一定的準則可依循,惟編者以個人之經驗提供下列準則,做爲讀者求極限時的參考.
記住下列五則基本型的極限,再透過運算律(有些恐須做變數變換或式之變換,化成基本型)找到所要的極限.

$$\lim_{x\to c} x = c; \lim_{x\to c} k = k, k\text{爲定數}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1; \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1(\text{詳見 p.88}\sim 90)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

例 1 求 $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{5x-1}{x^2+3}}$.

解 充分利用上面諸運算性質(相當於直接將x以1代入),只須注意分母不會發生0的情況即可.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{5x-1}{x^2+3}} &= \sqrt{\lim_{x\to 1}\frac{5x-1}{x^2+3}} \\
&= \sqrt{\frac{\lim_{x\to 1}(5x-1)}{\lim_{x\to 1}(x^2+3)}} \\
&= \sqrt{\frac{(5\lim_{x\to 1} x)-1}{(\lim_{x\to 1} x^2)+3}} \\
&= \sqrt{\frac{4}{4}} = 1
\end{aligned}$$

例 2 試求 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{3x^2-7}$.

解 須先把會發生$\pm\infty$的因子想辦法先約掉.當$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{3x^2-7}$直接分子分母取極限時,會形成$\frac{\infty}{\infty}$之型,讀者千萬不可將$\infty$約分而得答案爲1.須知$\infty$不是有定義之數,它

沒有約分的意義.碰到分子分母會產生∞之前,須先除去會使它們發生的因子,此即分子分母除去x^2得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2}{3x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-2/x^2}{3-7/x^2}=1/3.$$

例3 試求$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$.

解 因分子與分母分別以1代入時均為0,可見分子分母有公因子$(x-1)$,須先約去.另外,讀者也許會發現分子非多項式,那有因子的說法?是的沒錯,但只要把它有理化不就行了嗎!所以碰到有根號的式子時,且分子分母會等於0時,記得把根式有理化.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)(x^2-1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)}=\frac{1}{\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)(x+1)}\\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

欲直接求$\lim_{x\to c}f(x)$有困難時,可想辦法找出兩函數$g(x),h(x)$把$f(x)$夾住並使得它們在c的極限不但存在而且相等時,可利用下示夾擊定理解決.

夾擊定理(squeezing theorem)

若有兩函數g,h)使$g(x)\leqq f(x)\leqq h(x),\forall x\in N(c,\delta)$成立,且$\lim_{x\to c}g(x)=\lim_{x\to c}h(x)$,則$\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)$.

定理證明 設$\lim_{x\to c}g(x)=l$.則

$$|f(x)-l|=|f(x)-g(x)+g(x)-l|\le|f(x)-g(x)|+|g(x)-l|\le\varepsilon+\varepsilon,\forall|x-c|\le\delta.$$

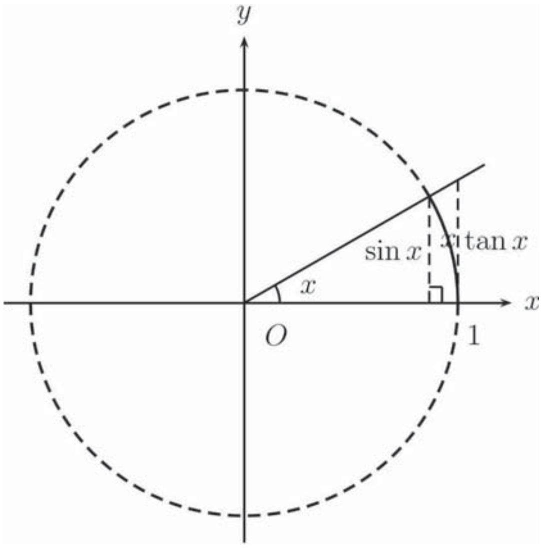
其中最後之不等式均得自假設.故得證$\lim_{x\to c}f(x)=l$.

註:若直接由所予不等式$g(x)\leqq f(x)\leqq h(x),\forall x\in N(c,\delta)$各取極限可得$\lim_{x\to c}g(x)\le\lim_{x\to c}f(x)\le\lim_{x\to c}h(x)$,而得證欲證式有何不妥?其中有爭議之處恐在於$\lim_{x\to c}f(x)$未知是否確存在的問題.

欲使用上定理時,要找其中的兩函數g,h滿足各條件須知不是那麼容易就是了.請參考下面例1.

例 1　試證 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

解

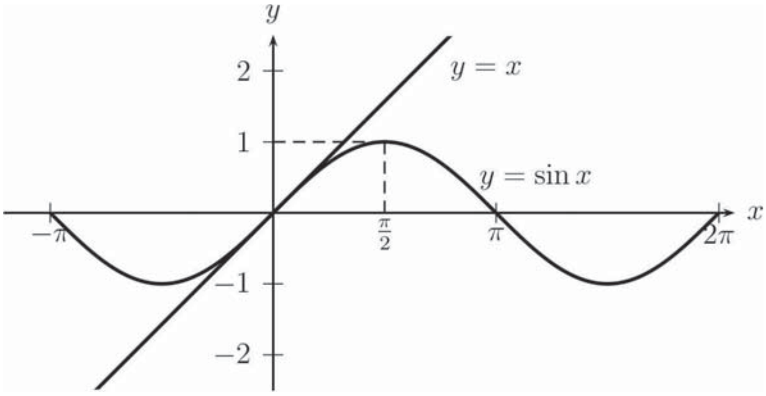


首先須知的是,所予極限不可分子分母分別取極限,因會產生 $\frac{0}{0}$ 無意義之型.另外,由於分子分母都會是 0,意即分子分母應含公因子 $(x-0)$ 才是,但 $\sin x$ 不是多項式,沒有所謂因子的說法.故亦無約去公因子的可能.在此只好另謀其他解法.因所予欲求之極限中含 $\sin x$ 爲圓函數之一,此乃爲破解困境的思路之一.
由上附圖,及所屬區域之面積關係,得知當 $x>0$ 時,有下述不等關係:

$$\sin x \leqq x \leqq \tan x$$

$$\therefore \quad \cos x \leqq \frac{\sin x}{x} \leqq 1$$

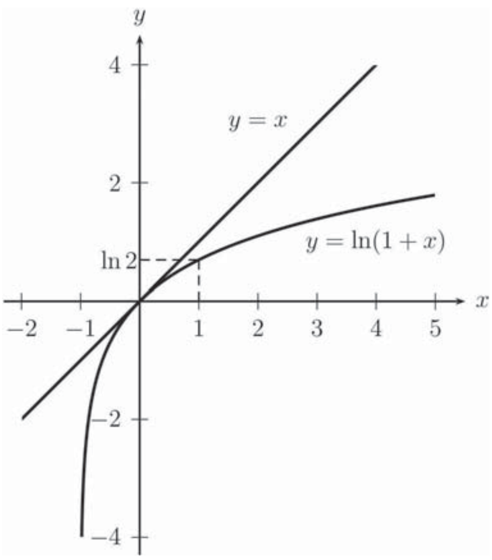
故由夾擊定理得 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$.
當 $x<0$ 時,仿上亦可得 $\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$.
故得證 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.



註 1: 能想到將所予函數 $\frac{\sin x}{x}$ 用兩較簡函數 $\cos x$ 與 1 來夾在當中, 著實不容易.

註 2: 此極限極爲重要, 是求三角函數之導數的依據, 它亦爲求有關極限的基本型, 請參照下面之諸應用例.

例 2 試證 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.



解 同上例. 首先須知的是, 所予極限不可分子分母分別取極限, 因會產生 $\frac{0}{0}$ 無意義之型. 另外, 由於分子分母都會是 0, 意即分子分母應含公因子 $(x-0)$ 才是, 但 $\ln(1+x)$ 不是多項式, 沒有所謂因式的說法. 故亦無約去公因式的可能. 在此只好另謀其他解法. 因所予欲求之極限中含 $\ln(1+x)$ 爲對數函數之一, 不妨從此摸索起. 已知 $\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$, 由於其中的 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 與數列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 具有相同的尾端模式 (取 $x=1/n$ 來進行.) 但數列 $\{(1+1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲遞增且有上界 (以 3 爲上界), 故爲收斂數列, 極限爲 e(自然對數之底數.) 詳見下註. 可見 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\ln e=1$.

註1:數列$\{(1+1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$爲何遞增且有上界(以3爲上界)?請參閱本章第4.6節2^o之例1(p.100.).
註2:此極限亦極爲重要,是求指數函數與對數之導數的依據,亦可做爲求相關極限的基本型.請參照下面之諸應用例.

應用例1 利用基本型極限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,試證$\lim_{x\to 0}\sin x=0$.

證 $\lim_{x\to 0}\sin x=\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0\cdot 1=0$.得證.
註:有關$\sin x$之種種實函數的極限大都可藉基本型$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$求得.如下例所示.

應用例2 利用基本型極限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,試求$\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1}{x-\pi/2}$.

解 $\lim_{x\to\pi/2}\frac{\sin x-1}{x-\pi/2}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t+\pi/2)-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin^2(t/2)}{t}$
$=\lim_{t\to 0}(-t/2)(\frac{\sin(t/2)}{t/2})^2=0\cdot 1^2=0$.其中令$t=x-\pi/2$.

應用例3 利用基本型極限$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$,試求下列諸極限.
a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.
b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$.
c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}$.

解 a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t/2}=\lim_{t\to 0}2\frac{\sin t}{t}=2\cdot 1=2$,其中$t=2x$.
b)$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\sin x\frac{\sin(x)}{x}=0\cdot 1=0$.
c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to 0}x\frac{\sin x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}x\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=0\cdot 1=0$.其中$t=x^2$.
註:其中$a)$之解很多讀者會誤解爲1,而不是2,請特別小心.爲解除讀者之疑慮,在此特舉另解如下,以資驗證. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}=2\lim_{x\to 0}\cos x\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1\cdot 1=2$.

應用例4 利用基本型極限$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,試證$\lim_{x\to 1}\ln x=0$.

證 $\lim_{x\to 1}\ln x=\lim_{t\to 0}\ln(1+t)=\lim_{t\to 0}t\cdot\frac{\ln(1+t}{t}=\lim_{t\to 0}t\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t}{t}=0\cdot 1=0$.得證,其中$t=x-1$.

應用例5 利用基本型極限$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,試求$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$.

解 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=1/1=1$.得證,其中$t=e^x-1$.

註:有關 $\ln x$ 之種種實函數及其反函數的極限經適當地變換後大都可藉基本型 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$ 求得.如下例所示.

應用例6 利用基本型極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$,試求下列諸極限
a) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$.
b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$.
c) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^2}{x}$.

解 a)$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t/2}=\lim_{t\to 0}2\frac{\ln(1+t)}{t}=2$.其中令 $t=2x$.
b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=\lim_{x\to 0}x\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}x\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}=0\cdot 1=0$.其中令 $t=x^2$.
c)$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)^2}{x}=\lim_{x\to 0}x\frac{\ln(1+x)^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}x\lim_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x})^2=0\cdot 1^2=0$.
註:由以上諸例可得知,欲求極限時,變數之間須力求一致性,千萬不能因表面都趨於0而忽略其所對應之極限會有所差別.

雙側極限與單側極限之間的關係

定理 若且唯若 $\lim_{x\to c}f(x)=l$,則 $\lim_{x\to c^+}f(x)=l$ 且 $\lim_{x\to c^-}f(x)=l$
(意即:一函數之雙側極限存在的充要條件是其兩單側極限存在且相等.)

證 i)($\Rightarrow$)因 $x\to c$ 包括 $x\to c^+$ 與 $x\to c^-$,可見此結論成立.
ii)($\Leftarrow$)如有一(左、右)極限不成立,則顯然雙極限也不存在.若左、又極限均存在但不相等時,如下例所示,雙極限亦不存在.

例1 令 $f(x)=\frac{x}{|x|}$,求 $\lim_{x\to 0}f(x)$.
解 $f(x)$ 可進一步化簡成

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{當 } x>0\text{時}\\ -1 & \text{當 } x<0\text{時)}\end{cases}$$

可見 $\lim_{x\to 0}f(x)$ 不存在.(因左極限不等於右極限.)

註:上例代表上定理可能被忽略之處.

例2 若已知 $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-3b}{x-1}=5$,試求常數 a,b 之值.

解 因直接分子分母分別取極限,分母會趨近於0,故欲使所予極限存在(爲定數5)只有使分子亦趨近於0才有可能.故得 $1+a-3b=0$.茲以 $a=3b-1$ 代回所予式再約去公因子可得 $\lim_{x\to 1}(x+3b)=5$.可見 $b=4/3,a=3$.

逆函數的極限

若一實函數 f 為可逆函數且 $\lim_{x\to c} f(x)$ 存在並等於 d,則其逆函數在 d 處亦有極限且 $\lim_{x\to d} f^{-1}(x) = c$.
註;此處可利用連續並圖示來瞭解.(參考p.95逆函數之連續性.)

例　如 $\lim_{x\to 1^-} \sin^{-1} x = \pi/2, \lim_{x\to\infty} \tan^{-1} = \pi/2$.

4.4 有極限之函數有何特性?

有極限的函數具有如下的特性.

1^o. 局部連續性

Let $f(x)$ be a real function defined on an interval I containing c. We say that f is continuous at c if $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.
意即實函數 $f(x)$ 會在定義域(為一區間I含 c)中的 c 處**連續**是當 $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ 成立時.換言之,所予實函數 f 在 c 處的極限值恰為函數在 c 之函數值 $f(c)$.一函數在 c 處的極限會剛好是在 c 的函數值時,這是所予函數具有的一種很特別性質,此性質在數學上就以連續稱呼之—因在 c 附近之點所對應的函數值都很接近 $f(c)$,有連續不斷的意味在.

針對上面定義,有下列幾點補充.

i) 當實函數 f 在 c 處連續時,表示實函數 f 具 $\lim_{x\to c} f(x) = f(\lim_{x\to c} x) = f(c)$,意即 f 與 $\lim_{x\to c}$(表一運算)可互換.

ii) 上定義的否定(即不連續之定義)為除了 $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ 外,須知尚有 $\lim_{x\to c} f(x)$ 不存在或 $f(c)$ 沒定義(即 c 不在函數的定義域中).

2^o. 局部近似性

若 $\lim_{x\to c} f(x) = l$,則 $\forall x \in (c-\delta, c+\delta), f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$,其中 δ, ε 如定義敘述中所述.此亦表函數值 $f(x)$ 之近似值為 l,當 x 落在 c 之適當鄰域中時.

3^o 局部有界性

有界性跟近似性差不多,習慣上前者把範圍更明確指出而已:若 $\lim_{x\to c} f(x)=l$,則 $\forall x\in(c-\delta,c+\delta), f(x)\in(l-\varepsilon,l+\varepsilon)$,其中 δ,ε 如定義敘述中所述.此處取 $\varepsilon=1$ 時,得 $|f(x)|<|l|+1, \forall x\in(x-\delta_0,c+\delta_0)$(因 $\varepsilon=1$, δ 須隨之確定,故以 δ_0 表之.)此亦表函數值 $f(x)$ 在 c 之適當鄰域之值不會超過 $|l|+1$ 之意.

4^o 局部保號性 (**Persistence of Sign**)

定理 假設 $f(x)$ 在區間 $[a,b]$ 上連續.若 $c\in(a,b)$,則必有一 c 之鄰域使其上對應的 $f(x)$ 均與 $f(c)$ 同號.
證 理由見下例.

例 $\lim_{x\to c} f(x)>0$ 有什麼涵意?

解 表函數 $f(x)$ 在 c 之附近都會正的意思.意即 $f(x)$ 不會忽然由負變正,也不會一下子由正變到負.以數學語言來說便是至少有一 c 之鄰域 $N(c,\delta)$ 使 $f(x)>0, \forall x\in N(c,\delta)$.

5^o. 局部大小比較性

一般而言,兩函數要比較哪一個一定比較大哪一個小恐機會不多,但若能建立局部之大小,有時亦可解決一些問題.這在決定無窮級數之斂散性上會用到.
i) 若 $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=l>0$ 時,則 $f(x)\geq g(x), \forall x\in(c-\delta,c+\delta)$

ii) 若 $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=l<0$ 時,則 $f(x)\leq g(x), \forall x\in(c-\delta,c+\delta)$

iii) 若 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 時,則 $f(x)\lll g(x), \forall x\in(c-\delta,c+\delta)$,其中 $\lll$ 表'小很多'之意.

iv) 若 $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ 時,則 $f(x)\ggg g(x), \forall x\in(c-\delta,c+\delta)$,其中 $\ggg$ 表'大很多'之意.
同上理,一般而言,兩函數要比較哪一個變動比較快哪一個比較慢恐不太容易,但若能建立局部之快慢,有時亦可解決一些問題(如不定型問題).這也在無窮級數之斂散性的決定上會用到.

若 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 時,則 $f(x)$ 變動比 $g(x)$ 變大慢得多,當 x 足夠大時.

若 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ 時,則 $f(x)$ 變動比 $g(x)$ 變大快得多,當 x 足夠大時.

6^o. 實函數之尾端的行爲模式 (**End Behavior Models**)

當 x 趨近 $\pm\infty$ 時 (即 x 數值很大或很小時) 有些複雜函數的行徑可用比較簡單的函數來取代. 須知數學總是以簡御繁的. 在數學上常見的漸近線 (asymptotes) 即屬此情況之例 (即曲線有變爲直線的特性). (參見下例)

尾端行徑模式

i) 設 f, g 爲兩函數. 若 $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 1$, 則稱 g 爲對 f 具有相同的右端行爲模式.
ii) 設 f, g 爲兩函數. 若 $\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = 1$, 則稱 g 爲對 f 具有相同的左端行爲模式.
註: 極限有 '去蕪存菁' 的作用. 意即取極限後, 有一些項會失去作用 (即趨近於零.)

例 1　讀者在高中學的雙曲線就有漸近線, 當 x 之值很大或很小時, 雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 與它的兩漸近線 $x/a \pm y/b = 0$ 就有 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$ 的特性.

解　須先把方程式改爲函數型, 爲 $y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$ 及 $y = \pm b\frac{x}{a}$. 不妨令前者爲 $g(x)$, 後者爲 $f(x)$, 則因 $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}}{b\frac{x}{a}} = 1$. 可見由定義知 $g(x)$ 具有對 $f(x)$ 相同的尾端行徑模式.
當然地, 漸近的方式未必只有直線而已, 應該取曲線也無妨, 只是是不是比較簡單, 就要斟酌了. 請參考下例.

例 2　試求下列函數的左及右尾端行徑模式.
a) $f(x) = \frac{2x^5+x^4-x^2+1}{3x^2-5x+7}$　*b*)　$g(x) = x + e^{-x}$

解　a) 由於當 x 很大或很小時, $f(x)$ 與 $\frac{2}{3}x^3$ 之比的極限等於 1, 故由定義知所予函數具有與函數 $2x^3/3$ 相同的左右尾端行徑模式.
b) 由於當 x 很大時, $g(x)$ 與 x 之比的極限等於 1(因 $e^{-x} \to 0$), 故由定義知所予函數具有與函數 x 相同的右尾端行徑模式. 由於當 x 很小時, $g(x)$ 與 e^{-x} 之比的極限等於 1(因此時的 e^{-x} 比 x 增快很多), 故由定義知所予函數具有與函數 e^{-x} 相同的左尾端行徑模式.

例 3　試求數列 $\{\frac{3n-4}{\sqrt{n^3+2n+5}}\}$ 之極限.

解　利用尾端行徑之性質. 由於當 n 很大時, 所予數列之一般項與 $\frac{1}{3n^{1/2}}$ 之比的極限等於 1, 故由定義知所予數列與數列 $\{\frac{1}{3n^{1/2}}\}$ 具有相同的尾端行徑模式. 故 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-4}{\sqrt{n^3+2n+5}} = 0$.

4.5 如何從局部性轉成整體性？

當所予函數不限於單點連續時,則稱所予函數爲連續函數(continuous functions.)此在微積分上佔有一定的份量.

實函數之連續性

f is a continuous function on its domain if it is continuous at every point in its domain.

意即,我們注重在整個定義域上的連續,不只在某一點上而已.注意,不在定義域的諸點必不連續.(因就是極限值存在也無法等於對應點的函數值(後者根本沒定義)).
由於實函數的連續性不但有極限值,而且就等於對應的函數值,可見有關極限之諸運算性質在此亦都必成立.是以,連續函數在它們的定義域中經有限次相加減乘除及取開根亦仍爲連續函數.由此亦易知,代數函數在它們的定義域中亦均爲連續函數.至於超越函數如三角函數中的$\sin, \cos$以及指數對數函數亦均在它們的定義域中連續.(詳見第五章可導必連續之特性(p.125)).

實函數之連續性保有實數之閉聯集(continuum)—無缺縫(no gap)之意.連續函數把閉區間對應到閉區間.(參照下頁之最大最小存在定理p.96.)

例1 令$f(x) = \frac{x}{|x|}$,問$f(x)$是不是連續函數？

解 由於$f(x)$可化簡成

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{當}\, x > 0\,\text{時} \\ -1 & \text{當}\, x < 0\,\text{時}) \end{cases}$$

顯然$x = 0$不在定義域中,故f在0處不連續.(因$f((0)$沒定義)
另外,由於定義域之其他實數對所予函數都有等於其函數值的極限值,可見所予函數在其定義域中均連續.

例2 設f, g爲兩實函數,且可合成,若$\lim_{x\to c} g(x) = l$, $f(x)$連續,試證

$$\lim_{x\to c} f \circ g(x) = f(\lim_{x\to c} g(x)).$$

解 由函數之連續性及合成運算即知.

逆函數之連續性

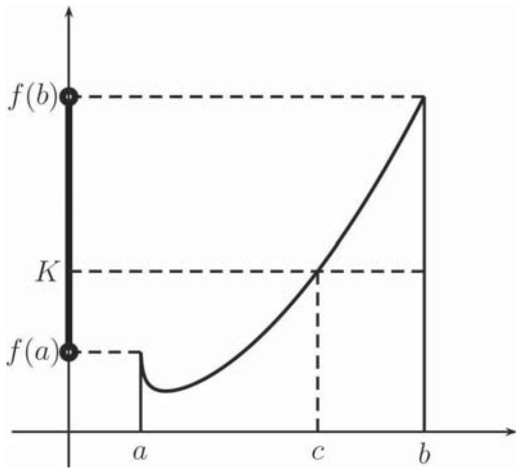
若實函數 f 爲可逆之連續函數,則其逆函數亦爲連續函數. (由函數的圖形與其逆函數之圖形的對稱性瞭解之.)

證 $\because f(f^{-1}(x)) = x, \therefore \lim_{x\to d} f(f^{-1}(x)) = f(\lim_{x\to c} f^{-1}(x)) = d$,(其中用到 f 之連續性及合成運算之連續性)可見 $\lim_{x\to d} f^{-1}(x) = f^{-1}(d)$. 此即表 $f^{-1}(x)$ 在 d 處連續.

中間值定理 (Intermediate Value Theorem)

若實函數 f 在區間 $[a,b]$ 上連續,且 $f(a) < f(b)$,則對任予 $k \in [f(a), f(b)]$,恆有 $c \in [a,b]$ 使 $k = f(c)$.

證略,請參照附圖



註 1: 敘述中的 k 便是所謂的中間值(在所予函數值之間之意.)此爲定理名稱之由來. 又須知敘述中的 c 可能不止一個.
註 2: 當 $k = 0$ 時,中間值定理就是讀者在高中數學中學過的有名的勘根定理.(如何勘根?)

最大-最小存在定理 (Max-Min Existence Theorem)

If $f$is continuous on a closed interval $[a,b]$,then $f$attains both a maximum value and a minimum value there.
意即,若 f 在閉區間 $[a,b]$ 上連續則 f 在該區間中必有最大値及最小値.
問題是,最大値及最小値會在那裡出現?怎麼找?答案在下一章第 5.5 節導數之應用.

證明 略(讀者可由一些圖示進行瞭解之.)

註:中間值定理跟最大最小存在定理都是微積分學上的重要存在定理,但其證明在初微階段都付缺.一般而言,存在不存在的問題都是比較難證明.(意即對初學者來說,其證明都會比較難以掌握,因而從缺.

例 1 試求 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1x$ 在區間 $[-1, 4]$ 上之最大值與最小值.

解 首先須知的是,所予函數在所予區間上連續.次將 $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ 配方成 $f(x) = 2(x - 3/4)^2 - 1/8$. 可見 $f(x)$ 有最小值 $-1/8$ 當 $x = 3/4$ 時;有最大值 21 當 $x = 4$ 時.

註:讀者都知道上例在高中數學裡是常見的題目,因要準備考大學.其解法用到配方法亦再熟練不過的方法了.此處提此例的用意是所欲求的最大值與最小值是否存在的問題,這在高中數學裡無法論及,因未談到函數的連續性.如今,有了上示定理,再解此例,不知讀者有何感想?也許讀者會認爲有沒有上示定理似乎無關此例之解.須知數學就是這麼一回事!不是只要找到個別答案就好,注重的是在一般性的建立上.

例 2 試求 $f(x) = 3\sin^2 x + 4\cos x$ 之最大值與最小值.

解 須知的是,所予函數在所予區間上連續.次配方 $f(x) = 3(1 - \cos^2 x) + 4\cos x = -3(\cos x - 2/3)^2 + 13/3$. 可見當 $\cos x = 2/3$ 時所予函數有最大值 $13/3$; 當 $\cos x = -1$ 時有最小值 -4.
註:本例實即上例之型,只差在其中的 x 換成 $\cos x$ 而已.另外須注意的是 $|\cos x| \leq 1$ 的天然限制.

例 3 試求 $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ 之最大值與最小值.

解 首先須知的是,所予函數在所予區間上連續.次將 $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$ 化成單一函數型 $f(x) = 5\sin(x + \theta)$, 其中 $\theta = \sin^{-1}(4/5)$. 可見 $f(x)$ 有最小值 -5 當 $x + \theta = -\pi/2$ 時;有最大值 5 當 $x + \theta = \pi/2$ 時.
註 1: 上兩例均在強調上定理的用處:在閉區間上的連續函數必有最大值及最小值,惟本例不同於上例者,儘管 sin 與 cos 都是連續函數,但沒給閉區間,似乎上定理使不上.須知本例相當於 $f(t) = 3t \pm 4\sqrt{1 - t^2}$, 其中自然蘊涵 $t \in [-1, 1]$, $\because t = \sin\theta$. 另外,$\pm$ 之取法視 θ 在哪一象限而定.
註 2: 讀者是否發覺到化成單一函數與配方(即配成單項)有很類似的效用(即在集中變數以方便掌握變數之變化情況).

例 4 令 $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{2x-1}$. 試在 $2 \leq x \leq 3$ 之限制下,求常數 M 使實函數 $|f(x)| \leq M$.

解 因分子分母有變數不好掌握,所以把所予分式化成帶分式: $f(x) = \frac{x}{2}+\frac{7}{4}+\frac{11/4}{2x-1}$. 可見 $|f(x)| = |\frac{x}{2}+\frac{4}{7}+\frac{11/4}{2x-1}| \le \frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{11}{4} = \frac{50}{12}$.(整式中的 x 以 3 代,分式中的 x 亦以 3 代可使整個式子變大.) 故取 $M = \frac{50}{12}$ 即可達成所欲.(讀者另請參照 p.59 中有關函數之有界性諸例.)

註:本例中所予函數在閉區間 $[2,3]$ 上爲一連續函數,理應可找到最大值與最小值,但在此例裡,只須求其一界限即可. 此種情況在微積分會常碰到. 另外,所求到的正數 M 非唯一.

4.6 相關題材

1^o 如何使一不連續的函數變成連續函數?

只要所予實函數在所予點處有極限值,則若此函數在該點處之值不等於它時(此即表所予函數不在該處連續之意),就改定義爲該極限值即可使原函數在該點處連續. 這在很多地方會用到這種情況.

例 函數 $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ 顯然在 $x = 0$ 處不連續. 請問應如何定義 $f(0)$ 使 f 在 $x = 0$ 處連續.

解 令 $f(0) = 1$, 則因

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x} = 1.$$

此即表 $f(x)$ 在 $x = 0$ 處連續.

註:其實只要所予函數 f 在某 $x = c$ 處有極限 l 時,若所予函數在該處不連續,可以很容易重新定義,使之變成連續,只須令 $f(c) = l$ 即得. 可見有極限的函數跟連續函數之間的差異很有限.

2^o. 實數列的收斂—-函數單側極限的特例

認識實數列

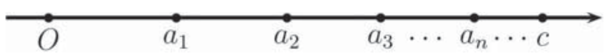
實數列 (Sequences of Real Numbers) 是由實數所組成的序列 (即將各實數編上號碼) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$. 其中 a_n 稱爲該數列之一般項或第 n 項. 當 $n \to \infty$

時, $a_n \to l$, (其中l爲定數,而$\to$表趨近之意),則稱實數列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$收斂至l,此時常以$\lim_{n\to\infty} a_n = l$表示. l稱爲該數列的極限.

針對上述定義,有下列幾點補充:
(1)直觀來看,給一數列時,很想知道的是其中最後之變化情勢,因其有無窮多項,所以只能以趨近何於定數來描述.讀者不能只看前幾項即能得知其會趨近於何定數吧!須知所謂'趨近'(tends)是指動態的接近,永不等於之意.以數學的語言來描述時,就得借用絕對值不等式表示:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 \ni \forall n > M, |a_n - l| < \varepsilon.$$

意即,要使a_n趨近定數l(此即$|a_n - l| < \varepsilon$之意,其中ε爲任意正數),就是要n足夠大(就是$n > M$之意,其中M爲適當的大正數,視所予數列及ε而定.)
(2)實數列可視爲函數的一種,注重的是它的對應的情況.在無窮多項的數列裡,當它收斂時,其極限就有一夫當關的作用,能以它的極限來代表大部分數列的項之意(只有有限項除外.因其他項均與其極限接近(可在預定的範圍內之意)之故,當收斂時.)



sequence

(3) $n \to \infty$表n會趨近於比任給的正數M還大的自然數之意,永無止境,亦即表一種狀態,跟$1/n \to 0$所要表達的意思完全一致.惟須記住的是,$1/n$永不等於0但總趨近(無限接近之意)它.
(4)至於定義中的定數l又如何得知?除非簡單的數列,這可不是容易得知之舉.詳見下欄.
(5)電腦上常使用的所謂演算法(Algorithm),實爲數列之應用.須知電腦上能做的東西大都須靠演算法進行(詳見p.44).由此可見,數列之重要性.
(6)如普通人在素描一棵老樹時,鉛筆一筆一筆地按照老樹的形狀描下去,樹的樣子就慢慢地顯示.究竟何時停筆很難講(即表n很大之意),但只要筆畫夠時(此即表$n \to \infty$之實際意義),所得之畫必與老樹'很像',多幾筆少幾筆無關緊要,是不?這可以說是數列含意的最好寫照,也是演算法的最佳實例.

例1 令$a_n = (-1)^n 1/n$,則如此所對應的數列收斂至0,蓋$\lim_{n\to\infty}(-1)^n 1/n = 0$.

例2 令$a_n = (-1)^n$,則如此所對應的數列不收斂,蓋$\lim_{n\to\infty} a_n$永遠不會趨近定數(永遠在1與-1兩者之間跳動),意即所予數列無極限.

例 3 令 $a_n = r^n$, 其中 r 為定實數且 $|r| < 1$, 則如此所對應的數列收斂至 0, 蓋 $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. (因 $|r|^n = (\frac{1}{1+h})^n < \frac{1}{1+nh} \to 0$, 當 $n \to \infty$ 時, 其中用到白努力 (Bernoulli) 不等式 (請見第一章 p.16), 而 h 為定正數. 即取 $r = \frac{1}{1+h} < 1$).

如何判定數列的收斂?

A bounded monotonic sequence is convergent. 有界單調數列必收斂. (此實即實數系之完備性)

所謂有界就是所予數列之各項都在某兩定數之間; 所謂單調是指所予數列不是一路遞增就是一路遞減之意. 一數列若一路遞增且上方有界, 讀者想想看最後是不是會趨近于某定數? 這是很直覺的事實吧.

註: 數列有界是指數列中各項之絕對值不會超過某定數之意; 即 $|a_n| < M$ (其中 M 表定數.)

例 1 試證: 數列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}_{n=1}^{\infty}$ 收斂至自然對數底 e.

解 i) 所予數列遞增: $(1+1/n)^n < (1+1/(n+1))^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n &= (1+\frac{1}{n})^n = 1 + (\frac{1}{n})n + (\frac{n(n-1)}{2!})(\frac{1}{n})^2 + \cdots + \\
&\quad + \frac{n(n-1)\cdots 321}{n!}(\frac{1}{n})^n \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= (1+\frac{1}{(n+1)})^(n+1) = 1 + (\frac{1}{(n+1)}(n+1) + (\frac{(n+1)n}{2!})(\frac{1}{(n+1)})^2 \\
&\quad + \cdots + \frac{(n+1)n\cdots 321}{(n+1)!}(\frac{1}{(n+1)})^{(n+1)} \\
&= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{(n+1)}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{(n+1)})(1-\frac{2}{(n+1}) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{(n+1)})\cdots(1-\frac{n}{n+1})
\end{aligned}$$

由對應項之大小做比較知 $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) 所予數列有上界:$(1+1/n)^n < 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_n &< 1+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{n!} \\ &< 1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{(n-1)}} \\ &= 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 3-(\frac{1}{2})^{n-1} < 3. \end{aligned}$$

可見所予數列 $\{a_n\}$ 遞增又有上限,由實數完備性知此數列有極限.

註 1: 這是很特別的數列,極限值是一無理數,特稱爲自然對數底,以 e 表示,約等於 2.718281. 有時爲避免如上之繁雜證明,直接定義

$$e \triangleq \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n.$$

註 2: 由上例亦可得 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$, 不論 x 是正是負之實數.
註 3: 餘請參見練習題第 25 題.

例 2 (Fibonacci Numbers(費氏數)) 設 $x_0 = 1, x_1 = 1$ 且 $x_{n+2} = x_n + x_{n+1}$ 試證: 數列 $\{x_{n+1}/x_n\}$ 收斂並求其極限.

解 i) 所予數列遞減且下方有界: 由假設得

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(x_n+x_{n-1})}{x_n} = 1+\frac{1}{\frac{x_n}{x_{n-1}}}, \qquad (*)$$

可見 $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ 且 $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{x_n}{x_{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ($\because$ 前者化成繁分數時之分母比後者化成繁分數時多一正項.)
ii) 由 i) 再依據實數完備性知所予數列必收斂, 令其極限值爲 α, 則由上 $(*)$ 式, 兩邊取極限得 $\alpha = 1+\frac{1}{\alpha}$. 故得 $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (其中負不合, 因 $\alpha > 1$.)

註: 須知費氏數列之相鄰兩項比的極限就叫做黃金比 (Golden Ratio) 約等於 1.61803($=(1+\sqrt{5})/2$). 費氏數列 $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots\}$ 是很古老而奇特的數列.

3^o 近似法的數學 (Math of Approximations)

有了函數極限的概念後,就可以介紹數學上有關近似的概念了.高中數學給大家的印象是,以為數學是精確的科學,一點誤差都不許可.須知這是不對的.習慣近似的想法對學習更高等的數學是必要的.
請問:任給兩實數,它們會相等知機率是多少?答案顯然是零.可見兩實數要相等不容易,換言之,兩實數不相等是極其希鬆平常之事.在很多情況裡,如在計算時,一味要求精確也不是容易之舉,有時也不必要.所以,有時為了節省人力物力起見,退而求其次,只求近似或接近,也是不得已的或無法避免的.問題是,如何近似得有道理,讓人心服口服?
微積分是談論有關實函數的極限問題:如$\lim_{x\to c} f(x)=l$,其中涉及$x\to c$即兩實數x,c須接近的問題.此處之x表可變動之實數,而c表不可變動之實數(即定數).兩實數之間究竟要如何接近?這就是本節的主題.
設a,b為兩實數,$a\approx b$(解讀成實數a近似實數b)如何定義?近似的意思當然是不要差很大.但是,怎樣才算不要差很大呢?實數之近似常以其表示法的小數位數表示近似的概況,如a與b之近似至n位小數時,以不等式$|a-b|<10^{-n}$表之,其中n視需要而定.

i) 實數的近似法

由實數列的收斂性易知:$a_n\approx b_n$(亦即$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n$) $\triangleq |a_n-b_n|<\varepsilon$,對足夠大的$n$來說(其中$\varepsilon$為任予正數).意即$a_n$與$b_n$近似的充要條件為$a_n$與$b_n$之差小於任予正數,只要$n$足夠大時.換言之,只要$n$足夠大,則其所對應$a_n$與$b_n$可任予接近.依據上性質,再由實數列收斂的運算律亦易得如下諸性質:

$$a_n\approx c_n, b_n\approx d_n \Rightarrow a_n+b_n\approx c_n+d_n \text{當} n \text{足夠大時}$$

$$a_n\approx c_n, b_n\approx d_n \Rightarrow a_n-b_n\approx c_n-d_n \text{當} n \text{足夠大時}$$

$$a_n\approx c_n, b_n\approx d_n \Rightarrow a_n\cdot b_n\approx c_n\cdot d_n \text{當} n \text{足夠大時}$$

$$a_n\approx c_n, b_n\approx d_n \Rightarrow a_n\div b_n\approx c_n\div d_n \text{當} n \text{足夠大時}$$

上列之末式中b_n與d_n須異於0.
註:請跟p.41之無理數運算做對照比較.

近似值的四則運算及誤差之估計

近似值就是數之接近的表示.已知無理數是無窮的非循環小數.因無理數大都以符號表示(如$\sqrt{2},e$等),要實際演算時,須改為其小數表示的若干位有限小數作近似值來進行.至於取多少位小數才算準確,無一定的標準,完全視實際情況而定.在此提供有

關近似值的演算以及所可能產生的誤差,給讀者參考.須知誤差的掌握在數學上不可或缺,希讀者留意.

設二正數a, b之近似值爲A, B其對應之誤差分別以$\Delta a, \Delta b$表示,即$|a-A|<\Delta a, |b-B|<\Delta b$,其中$\Delta a, \Delta b$可取$10^{-n}$表誤差小於小數點第$n$位時,則

i)

$$|a \pm b-(A \pm B)| \leq |\Delta a+|\Delta b||$$

ii)

$$|\frac{ab-AB}{ab}| \leq |\frac{\Delta a}{a}|+|\frac{\Delta b}{b}| \Leftrightarrow |ab-AB| \leq ab(|\frac{\Delta a}{a}|+|\frac{\Delta b}{b}|)$$

iii)

$$|\frac{\frac{a}{b}-\frac{A}{B}}{\frac{a}{b}}| \leq |\frac{\Delta a}{a}|+|\frac{\Delta b}{b}| \Leftrightarrow |\frac{a}{b}-\frac{A}{B}| \leq \frac{a}{b}| \leq |(\frac{\Delta a}{a}|+|\frac{\Delta b}{b}|)$$

解說 令$A=a-\Delta a, B=b-\Delta b$,而誤差之絕對值爲$E$時,則

i)

$$E=|(a \pm b)-(A \pm B)|=|\Delta a \pm \Delta b| \leq |\Delta a|+|\Delta b|$$

ii)

$$\begin{aligned} E=|ab-AB| &= |ab-(a-\Delta a)(b-\Delta b)| \\ &= |b\Delta a+a\Delta b-\Delta a\Delta b| \\ &\approx |b\Delta a+a\Delta b| \end{aligned}$$

$$\therefore |\frac{E}{ab}| \leq |\frac{\Delta a}{a}|+|\frac{\Delta b}{b}|$$

iii)

$$\begin{aligned} E &= |\frac{a}{b}-\frac{A}{B}|=|\frac{a}{b}-\frac{a-\Delta a}{b-\Delta b}| \\ &= |\frac{a}{b}-\frac{a}{b}(1-\frac{\Delta a}{a})(1-\frac{\Delta b}{b})^{-1}| \\ &\approx |\frac{a}{b}-\frac{a}{b}(1-\frac{\Delta a}{a})(1+\frac{\Delta b}{b})| \\ &\approx |\frac{a}{b}(\frac{\Delta a}{a}-\frac{\Delta b}{b})| \leq \frac{a}{b}(|\frac{\Delta a}{a}|+|\frac{\Delta b}{b}|) \end{aligned}$$

例 1 若$\sqrt{2}=1.41421+\Delta_1, \sqrt{3}=1.73205+\Delta_2$,其中$\Delta_1$,與$\Delta_2$均表誤差.試求$\sqrt{2}-\sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3}$及$\sqrt{2} \div \sqrt{3}$之誤差.

解 由上知
i) $|(\sqrt{2}-\sqrt{3})-(1.41421-1.732051)| \leq (|\Delta_1|+|\Delta_2|)$
ii) $|\sqrt{2}\sqrt{3}-1.41421\cdot 1.732051| \approx |1.732051\Delta_1+1.41421\Delta_2|$
iii) $|\sqrt{2}/\sqrt{3}-1.41421/1.732051| \leq \frac{1.41421}{1.732051}(|\frac{\Delta_1}{1.41421}|+|\frac{\Delta_2}{1.732051}|)$.
註:其餘請參考'無理數之近似值'一欄(p.41).

例 2 試草算 $\frac{(\sqrt{430}+72+\sqrt[3]{7.5})}{2.75}$

首先須認清什麼叫草算?草算也是一種粗算或簡算,意即初步的估算.
解 在細算之前能有粗略的估算對結果的掌握會比較有把握,因人總是難免發生錯失的.如本例可以約略以 $(20+72+2)/3$ 來粗算得 30.有時你不知爲何得到之結果爲 93.448 時,因跟你粗算的結果差太多而知一定哪裡出錯,可能壓錯計算器的鍵,也可能是弄錯了小數點.可見估算有其一定的正面效果,不容忽略.重算一遍後得到答案爲 34.434 時,因此結果跟估算的算是比較接近,故可放心是正確的答案了.

例 2 設 $x,a,y,b\in\mathbb{R}$, 且 $|x-a|<\varepsilon, |y-b|<\varepsilon$, 其中 $\varepsilon>0$.
a) 試證 $|xy-ab|<(|a|+|b|)\varepsilon+\varepsilon^2$
b) 試證 $|x^2y-a^2b|<\varepsilon(|a|^2+2|ab|)+\varepsilon^2(|b|+2|a|+\varepsilon^3)$

證 (須利用三角形不等式:$|a\pm b|\leqq|a|+|b|$) 由假設易得 $|x|-|a|<\varepsilon \Rightarrow |x|<|a|+\varepsilon$.
a)

$$\begin{aligned}|xy-ab| &= |xy-xb+xb-ab| \leqq |x||y-b|+|b|x-a| < |x|\varepsilon+|b|\varepsilon\\ &< (|a|+\varepsilon)\varepsilon+|b|\varepsilon=(|a|+|b|)\varepsilon+\varepsilon^2.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}|x^2y-a^2b| &= |x^2y-a^2y+a^2y-a^2b| \leqq |x^2-a^2||y|+|a^2||y-b|\\ &< (2|a|+\varepsilon)\varepsilon(|b|+\varepsilon)+|a^2|\varepsilon\\ &= \varepsilon(|a^2|+2|ab|)+\varepsilon^2(|b|+2|a|)+\varepsilon^3\end{aligned}$$

註 1: 如上證法中,如何配出題設的型式是關鍵.爲達此關鍵,在證 a) 部分時乃有加減 xb 一項的想法出現,特請讀者留意.在證 b) 部分時亦然.
註 2: 微積分是探討'接近的'的數學,自然就涉及誤差的問題.以上就是有關誤差演算的一些性質,供讀者參考.

ii) 實函數的近似法

由實函數的極限法易知:f(x)≈ $g(x)$(亦即 $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)) \triangleq |f(x) - g(x)| < \varepsilon$,對 c 之某鄰域 $(c-\delta, c+\delta)$ 來說(其中 ε 爲任予正數,而 δ 爲適當正數).意即 $f(x)$ 與 $g(x)$ 近似的充要條件爲 $f(x)$ 與 $g(x)$ 之差小於任予正數,只要 x 落在 c 之適當鄰域中.換言之,只要 x 落在 c 之適當鄰域中,則其所對應 $f(x)$ 與 $g(x)$ 可任予接近.依據上性質,再由實函數極限的運算律亦易得如下諸性質:

$f_1(x) \approx f_2(x), g_1(x) \approx g_2(x) \Rightarrow f_1(x) + g_1(x) \approx f_2(x) + g_2(x)$當 x 落在 c 之適當鄰域中時

$f_1(x) \approx f_2(x), g_1(x) \approx g_2(x) \Rightarrow f_1(x) - g_1(x) \approx f_2(x) - g_2(x)$當 x 落在 c 之適當鄰域中時

$f_1(x) \approx f_2(x), g_1(x) \approx g_2(x) \Rightarrow f_1(x) \cdot g_1(x) \approx f_2(x) \cdot g_2(x)$當 x 落在 c 之適當鄰域中時

$f_1(x) \approx f_2(x), g_1(x) \approx g_2(x) \Rightarrow f_1(x) \div g_1(x) \approx f_2(x) \div g_2(x)$當 x 落在 c 之適當鄰域中時

上列之末式中 $g_1(x)$ 與 $g_2(x)$ 須異於0.

註1:由上知,實函數之近似與實數近似幾乎沒有什麼兩樣,可彼此互通.
註2:有諸多定理亦均可改成近似來描述,請留意後面章節有關近似的陳述.如p.125之線性近似法及p.169之數值積分法.

4.7 本章統合

本章定義了實函數的極限,不要一味地只在求極限而已.須知有了極限的概念後,就可以局部的知悉該實函數的一些特性,如局部連續性、局部近似性、局部有界性、局部保號性、局部大小性、局部快慢性、尾端行徑等等,分述如下.

i) 局部連續性(local continuity):若 $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$,則稱 $f(x)$ 在 c 處連續.意即表函數 $f(x)$ 在 c 處保有自變數之閉聯性.

ii) 局部近似性(local approximate):若 $f(x)$ 在 c 處連續,則 $f(x) \approx f(c), \forall x \in (c-\delta, c+\delta,)$ 其中 $\delta > 0$ 爲適當正數.

iii) 局部有界性(local boundedness):若 $f(x)$ 在 c 處連續,則 $|f(x)| < |f(c)| + 1, \forall x \in (c-\delta, c+\delta,)$ 其中 $\delta > 0$ 爲適當正數,ε 不妨取爲1.

iv) 局部保號性(local sign-persistence):若 $f(c) > 0$,則 $f(x) > 0 \forall x \in (c-\delta, c+\delta)$,其中 δ 爲適當正數.意即若 $f(c)$ 爲正時,$f(x)$ 亦在 c 之適當鄰域上爲正,保持同號.

v) 局部大小比較性:a)若$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=l>0$時,則$f(x)\ge g(x),\forall x\in(c-\delta,c+\delta)$
b)若$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=0$時,則$f(x)\lll g(x),\forall x\in(c-\delta,c+\delta)$,其中$\lll$表'小很多'之意.
c)若$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$時,則$f(x)\ggg g(x),\forall x\in(c-\delta,c+\delta)$,其中$\ggg$表'大很多'之意.

vi). 實函數之尾端的行爲模式(End Behavior Models)
當x趨近$\pm\infty$時(即x數値很大或很小時)有些複雜函數的行徑可用比較簡單的函數來取代.
註:如何從局部性質轉成整体性質也是學習的重點所在.

陽春極限的另一解讀

已知$\lim_{x\to c}f(x)=l$表$f(x)-l\to 0$,只要$x-c\to 0$時.今由實函數的零性(參見p.62)亦知,此亦表$f(x)-l$含有'因子'$(x-c)$之意.此處因子加引號是因實函數沒有所謂因式之說法.(詳見p.132之附記.)須知能將所予函數加以'分解',總是掌握函數性質的竅門之一!

中間値定理之另一解讀

設函數$f(x)$爲一實函數,定義于$D\subset\mathbb{R}$.對任予實數k,問$\lim_{x\to ?}f(x)=k$?
這是求極限的反問法—-通常是給c求k今則反之,這是不是有點像是中間値定理,但須注意此時並未給與函數$f(x)$連續性之假設.
本問題之解法相當於求方程式$(f(x)-k)=0$之實解.此亦即問k是否落入$f(x)$之値域中.這些實際上跟中間値定理之用意沒兩樣.

$\lim_{x\to c}f(x)=0$之深沉意義

須知$\lim_{x\to c}f(x)=0$中的0不是真0.它表$f(x)$會很接近0,只要x很接近c時.要注意的是此變動的函數$f(x)$等於0的機會爲零.當有另一亦會趨於0之變數引進時,其作用就會顯示出來.如$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{x-c}$若存在,就未必等於0.(詳見下一章.)

有了數列的收斂回頭認識無理數

本來數列的收斂一節應放在第二章裡談論,本書斟酌再三,最後決定放在第四章,接在函數之極限後來談,效果是否較佳,就留給讀者思考了.數列的收斂若放在第二章,則對無理數的認識自有深刻的作用在.須知沒有數列的收斂概念做根基,就很難理解無理數的存在意義,跟著近似的理論也就難以建立.總之,把無理數跟數列的收斂綁在一起來互相瞭解,應不致有何差錯的.無理數就是某適當有理數所成數列的極限.用這種方式認識無理數,是不是更能看出無理數之廬山真面目?

本章回顧

學了本章有關極限的概念後有何心得可言?

i) 求極限的問題解決了沒?
欲求的極限大部分都可直接以趨近的自變數值代入而得,只要所予函數具連續性時.當所予函數不連續時,除了沒有極限值者(如 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$)外,就屬 $0/0$ 及 $k/0$ 兩型(其中 $k \neq 0$),算是較常遇見且較棘手的情況了.其中之後者也是屬不存在的情況,惟其最後之極限為 $\pm\infty$.至於前者(並包括所有不定型之問題)則是下一章之主題,很值得進一步探討.

ii) 須知能直接以自變數之值代入者(即不用趨近的概念直接以相等代入),因所予函數都連續,如所知之初等函數等.由於高中階段的數學裡因所遇到的函數大都是連續函數,所以在那種情況下要不要取極限無關緊要.不過須知的是,還有諸多情況都屬不連續,想都只以相等來面對恐有其侷限.為解除此侷限,乃不得不引進趨近或近似的概念.例如下一章要討論的相對極限法即是一例.另外,只要涉及無窮的概念,也只有靠極限的工具才能交待清楚.譬如,要談論無理數的種種性質亦不得不依據趨近的方式來進行不可,因無理數的相等只是記號上的方便而已,沒有什麼實質的意義可言.

iii) 有了極限的概念後,對函數的掌握就不致於只是逐點式的進行而已,可以改成鄰域亦即集團的方式進行,避免'畫虎不像反類犬'.換言之,要找到函數之整體性不容易之餘,能找到局部性亦屬難得,極限的存在就告知所予函數在該點附近具有的一些局部行徑.

iv) 如以前談論多項式的除法時,只須把數的除法加以推廣即可得.但對一般函數的除法想直接從已有的除法加以推廣恐就有困難了.利用極限的概念就可施展一些有關這方面的概念(詳見下一章).其他如定積分的定義(詳見第六章)也非靠取極限之概念無以成事.

4.8 練習題

1. 求下列各極限.
a) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ b) $\lim_{t\to 0}\frac{\tan 2t}{\sin 2t-1}$
c) $\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+1)[x]}{(3x-1)^2}$ d) $\lim_{x\to\infty}(1-5/x)^{2x}$

2. 試證下列之極限不存在.

a) $\lim_{x\to\infty}\sin(x+1/x)$ *b*) $\lim_{t\to 3}\frac{\tan|t-3|}{\sin(2t-6)}$
c) $\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+1)[x]}{(3x-1)^2}$ *d*) $\lim_{x\to\infty}(1+5/x)^{x^2}$

3. 下面哪一敘述跟極限定義之同義?
a) 對某 $\varepsilon > 0$ 且每一 $\delta > 0, 0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$.
b) 對每一 $\delta > 0$, 都有對應的 $\varepsilon > 0$ 使得

$$0 < |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon.$$

c) 對每一正整數 N, 有對應的正整數 M 使得 $0 < |x-c| < 1/M \Rightarrow |f(x)-l| < 1/N$.
d) 對每一 $\varepsilon > 0$ 有對應的 $\delta > 0$, 使得 $0 < |x-c| < \delta$ 且對對其中某 x, $|f(x)-l| < \varepsilon$ 成立.

4. a) 若已知 $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+ax-3b}{x-1} = 2$, 試求常數 a, b 之值.
b) 試求定數 a, b 使 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$ 成立.

5. 試證實函數

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{當 } x \text{ 爲有理數時} \\ -1 & \text{當 } x \text{ 爲無理數時} \end{cases}$$

處處不連續.

6. 試證 $\sin x, \cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上爲連續函數. 問 $\tan x, \sec x$ 也是 $\mathbb{R}$ 上的連續函數嗎?

7. 試化簡下列各極限.
a) $f(x) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1-x^2}{1+x^2})^n$ b) $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\tan^{-1}nx$
c) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{[x]}$, 其中 $[x]$ 表高斯函數 (即最大整數函數.)

8. 令

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{當 } x \leqq 0 \text{ 時} \\ ax+b, & \text{當 } 0 < x < 1 \text{ 時} \\ 1, & \text{當 } x \geqq 1 \text{ 時} \end{cases}$$

試決定 a, b 之值使 $f(x)$ 處處連續.

9. 試決定實數 c 之值, 使函數

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 1 \\ cx+3, & x \geqq 1 \end{cases}$$

處處連續.

10. 試求所有的a使函數f在$\mathbb{R}$上連續.

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le a \\ x^2-3, & x>a \end{cases}$$

11. 假設$\lim_{x\to c} f(x)=l$且$f(c)$有定義,試證f在含c的某適當區間上爲有界(bounded).

12. 試舉例證明若

a) $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))$存在,未必蘊含$\lim_{x\to c} f(x)$或$\lim_{x\to c} g(x)$均存在.

b) $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))$存在,未必蘊含$\lim_{x\to c} f(x)$或$\lim_{x\to c} g(x)$均存在.

13. 試求下列各函數之漸近線(包括水平、垂直、或斜的三種),若有的話.

a) $f(x)=\frac{x-1}{2x^2-5x-3}$ b) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x+1}$ c)$f(x)=\sec x$

14. 下列命題成立否?

a)設f,g爲兩實函數且可合成.若$f\circ g$連續,則f,g亦均連續.

b)設f,g爲兩實函數且可合成.若f及$f\circ g$連續,則g亦連續.

c)設f,g爲兩實函數且可合成.若g及$f\circ g$連續,則f亦連續.

15. 設F,G爲實函數並對所有鄰近c的x(可能不包含c)滿足$0\le F(x)\le G(x)$.試證若$\lim_{x\to c} G(x)=0$,則$\lim_{x\to c} F(x)=0$.

16. 試證若$|f(x)|<B$對$|x-c|<1$且$\lim_{x\to c} g(x)=0$,則$\lim_{x\to c} f(x)g(x)=0$.

17. 試求下列各函數之最大值與最小值.

a) $f(x)=4\sin x+3\cos x, x\in[\pi/3,2\pi/3]$ b) $f(x)=\frac{x^2-x+3}{x^2+5}, 2\le x\le 5$

c)$g(\theta)=\sin^2\theta(1+\cos 2\theta), 0\le\theta\le\pi/2$.

18. 下列個函數$f(x)$顯然在$x=0$處不連續.請問應如何定義$f(0)$使f在$x=0$處連續.

a) $f(x)=\frac{\sin 2x}{x}$ b) $f(x)=\frac{(x+2)^3-8}{x}$ c) $f(x)=10^{-1/x^2}$ d) $f(x)=x/|x|$.

19. 令$f(x)=\frac{\sin\pi x}{x(1-x)}$,其中$0<x<1$.

a)試在$x=0,1$處定義f使之在$[0,1]$上連續.

b)在完成a)之後,試求f在$[0,1]$上的最大值及最小值.

c)試描$y=f(x)$之圖形.

20. 試證方程式 $\sin x = x - 1$ 在 $[0, \pi]$ 上必有實根.

21. a) 已知 $f(x)$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 有定義, 且在 $x = 0$ 處連續, 並對所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 滿足 $f(x+y) = f(x)f(y)$, 試證函數 f 處處連續.

b) 已知 $f(x)$ 對所有 $x \in \mathbb{R}$ 有定義, 且在 $x = 0$ 處連續, 並對所有 $x, y \in \mathbb{R}$ 滿足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, 試證函數 f 處處連續.

22. 求 a 之值使 $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+a}{x-a})^x = e$ 成立.

23. 下列數列何者收斂?
a) $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ b) $\{n[1-(-1)^n]\}$
c) $\{\frac{\sin n}{n}\}$ d) $\{(1+\frac{2}{n})^n\}$
e) $\{\frac{n \sin n}{n^2+1}\}$ f) $\{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\}$

24. 試檢定以下列爲一般項之數列之斂散性.
a) $\frac{n^2}{n^3+1}$ b) $\frac{(n+1)(n+2)}{n^2 \cdot 2^n}$
c) $n^{(1-n)/n}$ d) $\frac{2\cdot 4\cdots 2n}{4\cdot 7\cdots(3n+1)}$

25. 求下列數列的極限, 其一般項如下各小題.
a) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n/2}$ b) $a_n = (1+\frac{1}{3n})^n$
c) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n+3}$ d) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{2n}$
e) $a_n = (1+\frac{1}{n})^{n^2}$ f) $a_n = (1-\frac{1}{n})^{-n}$

第四章練習解答

1. a) 0; ($\because \lim_{x\to\infty} |\frac{\sin x}{x}| \le \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0$.)
b) 0; ($\lim_{t\to 0} \frac{\tan 2t}{\sin 2t - 1} = \frac{\lim_{t\to 0} \tan 2t}{\lim_{t\to 0} \sin 2t - 1} = \frac{0}{-1} = 0$).
c) 2/5; ($\lim_{x\to 2^+} \frac{(x^2+1)[x]}{(3x-1)^2} = \frac{5\cdot 2}{5^2} = 2/5$.)
d) e^{-10}; ($\lim_{x\to\infty}(1-\frac{5}{x})^{2x} = \lim_{x\to\infty}[(1-\frac{5}{x})^{x/5}]^{10} = [\lim_{x\to\infty}(1-\frac{5}{x})^{x/5}]^{10} = [e^{-1}]^{10}$).

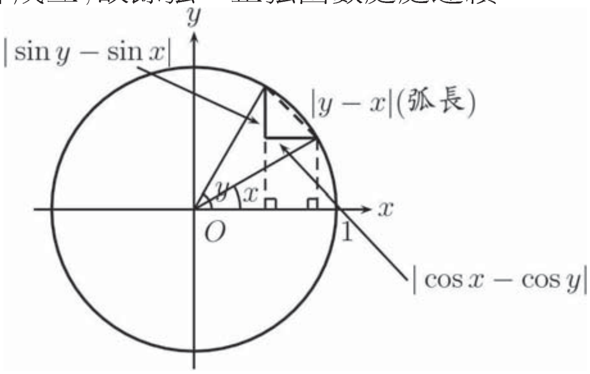
2. a) ($\because \lim_{x\to\infty} \sin(x+1/x) = \sin(\lim_{x\to\infty}(x+1/x) = \sin\infty$: 不存在.)
b) ($\lim_{u\to 0} \frac{\tan|u|}{\sin(2u)} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin|u|}{\sin 2u} \lim_{u\to 0} \frac{1}{\cos|u|} = \pm\frac{1}{2}\cdot 1 =$ 不確定).
c) ($\lim_{x\to 2} \frac{(x^2+1)[x]}{(3x-1)^2} = \frac{5\cdot 2}{5^2} = 2/5$, 當 $x > 2$ 時; $= \frac{5\cdot 1}{5^2} = 1/5$, 當 $x < 2$ 時.)
d) ($\lim_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x})^{x^2} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{5}{x})^{x/5}]^{5x} = [\lim_{x\to\infty}(1+\frac{5}{x})^{x/5}]^{\lim_{x\to\infty} 5x} = e^\infty = \infty$).

3. c).(這是含量詞的敘述的檢驗.)

4. a)因直接分子分母分別取極限,分母會趨近於0,故欲使所予極限存在(爲定數2)只有使分子亦趨近於0才有可能.故得$1+a-3b=0$.茲以$a=3b-1$代回所予式再約去公因子可得$\lim_{x\to 1}(x+3b)=2$.可見$b=1/3, a=0$.
b) $a=b=4$(仿a)進行.)

5.因$f(x)$在每一個實數a處之極限都不存在,故處處不連續.(每一實數之近鄰都有有理數及無理數之故.)

6.由附圖知$|\cos x-\cos y|\le|x-y|$,可見$\lim_{y\to x}\cos y=\cos x$, $\sin x$同理可得證.當x爲任予實數時,前等式都成立,故餘弦、正弦函數處處連續.



因$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$.已知$\sin, \cos$均連續,故它們的商亦連續(但分母爲零者除外.)因$\sec x=1/\cos x$同前知亦爲連續(須$\cos x\neq 0$.)

7. a) $f(x)=1$當$x=0$時; $f(x)=0$當$x\neq 0$時　b) $f(x)=x/|x|, x\neq 0; f(0)=0$.
c) $=1$(設$x=n+\epsilon$,其中$n\in\mathbb{Z}, 0\le\epsilon<1$.則$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\epsilon}{n}==1$.)

8.只須查證$x=0,1$處連續即可,因其他地方均連續.由於在$x=0$處須連續故$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$.由此得$b=-1$.又由於在$x=1$處須連續故$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$.由此得$a+b=1$. $\therefore a=2$.

9.同上題,只須查證$x=1$處連續即可.

$$\lim_{x\to 1}=\begin{cases}\lim_{x\to 1^-}(x^2+1)=2\\ \lim_{x\to 1^+}(cx+3)=c+3\end{cases}$$

得$2=c+3, \therefore c=-1$.

10.只須查證$x=a$處連續即可(因其他處均連續):$\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)$有此得$a-1=a^2-3$解得$a=2$或$-1$.

11. 按極限定義知對任予正數ε,必有c之鄰域$N(c,\varepsilon)$可能去c點使

$$|f(x)-l|<\varepsilon.$$

在此不妨取$\varepsilon=1$,則得$l-1<f(x)<l+1$. 可見$f(x)$在鄰域$N(c,1)$上有界.

12.a) 如$f(x)=\frac{1}{x-c}, g(x)=-\frac{1}{x-c}$,則顯然$\lim_{x\to c}f(x), \lim_{x\to c}g(x)$均不存在,但$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to c}0=0$.
b) 如$f(x)=\frac{1}{x-c}, g(x)=x-c$,則顯然$\lim_{x\to c}f(x)$不存在,但$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to c}1=1$.

13. 將所予函數化成帶分式,則帶分式中的整式部分若爲一次式時,令等於y即爲斜漸近線或水平漸近線;當分母含一次因式時(或將其分解之)令爲0時便得垂直漸近線.
a) 斜漸近線$y=0$;垂直漸近線$x=-1/2, x=3$.
b) 斜漸近線$y=x-3$;垂直漸近線$x=-1$.
c) 斜漸近線無;垂直漸近線$x=n\pi\pm\pi/2, n\in\mathbb{Z}$.

14.a) 否,如$f(x)=\frac{1}{x}$在$x=0$處不連續,而$f\circ f(x)=x$恆連續.
b) 成立,若$g(x)$在c處不連續,則$\lim_{x\to c}f(g(x))=f(\lim_{x\to c}g(x))\neq f(g(c))$. 矛盾.
c) 成立,若$f(x)$在$g(c)$處不連續,則$\lim_{x\to g(c)}f(x)\neq f(g(c))$. 矛盾(因$\lim_{x\to c}f(g(x))=f(g(c))$).

15. 此即夾擊定理之變型之一.

16. 顯然$|f(x)g(x)|<B|g(x)|<B\varepsilon$,可見$\forall|x-c|<1, |f(x)g(x)|$可任意小.
故得$\lim_{x\to c}f(x)g(x)=0$.

17. a) $f(x)=5\sin(x+\theta)$,其中$\theta=\tan^{-1}4/3$(定角:大於$\pi/4$小於$\pi/3$). 因$\pi/3\leq x\leq 2\pi/3$,得$\pi/3+\pi/4<\pi/3+\theta\leq x+\theta\leq 2\pi/3+\theta<\pi$故得所予式之最大值爲$5\sin(\pi/3+\theta)$;最小值爲$5\sin(2\pi/3+\theta)$(因$\sin(x+\theta)$在$[\pi/3,2\pi/3]$上爲遞減函數.)
b) $f(x)=1-\frac{x+2}{x^2+5}=1-7/30$最大當$x=5$時;$=1-4/9$最小當$x=2$時.
c) $g(\theta)=\frac{1-\cos^2 2\theta}{2}$,可見其最大值爲$1/2$當$\theta=\pi/4$時;最小值爲0當$\theta=\pi/2$時.

18. a) 令$f(0)=2$,則因

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\lim_{2x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2.(\text{須保持同型})$$

此即表$f(x)$在$x=0$處連續.

b) 令 $f(0)=12$,則因

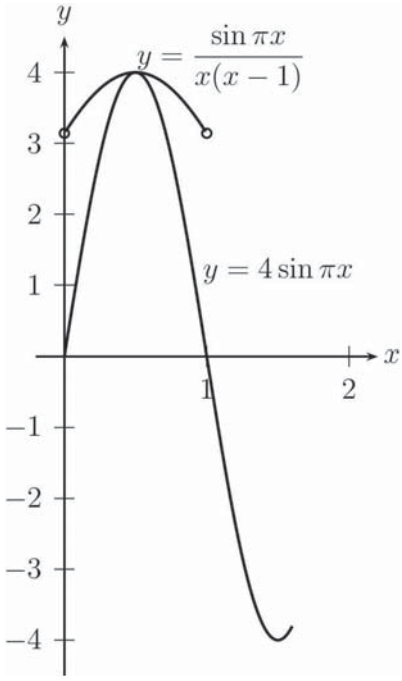
$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(x+2)^3-8}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3 6x^2+12x}{2x}=12$$

此即表 $f(x)$ 在 $x=0$ 處連續.
c) a) 令 $f(0)=1$,則因

$$\lim_{x\to 0} f(x)=10^{\lim_{x\to 0}-1/x^2}=10^0=1.$$

此即表 $f(x)$ 在 $x=0$ 處無法定義使其連續.
d) 因 $f(0)$ 不存在,故 $f(x)$ 在 $x=0$ 無法連續.

19. a) $f(0)=\pi$; $f(1)=\pi$.(因 $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\pi x}{x}\frac{1}{\lim_{x\to 0}(1-x)}=\pi\cdot 1$;
$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi-\pi x)}{1-x}\frac{1}{\lim_{x\to 1}x}=\pi\cdot 1$.)
b) 最大値 4;最小値 π.(因 $x(1-x)\le 1/4$,等號成立於 $x=1/2$ 時.)
c) 見附圖



20. 利用中間値定理:令 $f(x)=1-x-\sin x$,則 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上連續,且 $f(0)>0$, $f(\pi)<0$.

21. a) 只須證明 $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ 即可. $\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0}(f(x)f(\Delta x)) = f(x)\lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = f(x)f(0)$.(最後等式是因 $f(x)$ 在 0 處連續, 另 $f(0) = 1$.)
b) 只須證明 $\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$ 即可. $\lim_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0}(f(x)+f(\Delta x) = f(x) + \lim_{\Delta x \to 0} f(\Delta x) = f(x) + f(0)$.(最後等式是因 $f(x)$ 在 0 處連續, 另 $f(0) = 0$.)

22. $\lim_{x \to \infty}(\frac{x+a}{x-a})^x = \lim_{x \to \infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{x-a}(1+\frac{2a}{x-a})^a = \lim_{x-a \to \infty}(1+\frac{2a}{x-a})^{x-a}(1+\frac{2a}{x-a})^a = e^{2a} \cdot 1 = e, \therefore a = 1/2$.

23. a) 收斂, 極限爲 0.
b) 發散
c) 收斂, 極限爲 0.(因 $|\sin n| \leq 1$)
d) 收斂, 極限爲 e^2.
e) 收斂, (類似 c))
f) 收斂, ($\ln n$ 雖遞增至 ∞ 但比 $\sqrt{n}$ 慢 (詳見 p.139 註 2))

24. a) 收斂, 極限爲 0.(因所予數列相當於 $\{1/n\}$)
b) 收斂 (因所予數列相當於 $\{1/2^n\}$)
c) 收斂 (因所予數列相當於 $\{n^{-1}\}$)
d) 收斂,(因所予數列相當於等比數列 $\{(2/3)^n\}$, 所予數列遞減且下方有界).

25. a)e^2 b)$e^{1/3}$ c)e^2 d)e^2 e)∞
f) e