

## 第三章

# 單變實函數之基本性質

內容

3.1 本章宗旨

3.2 認識實函數——實函數系

3.3 實函數之基本性質——一對一? 偶奇? 週期? 增減? 有界? 可逆? 零性?

3.4 實函數之分類及其圖示

3.5 相關題材: 怎麼還原函數? 怎麼建立模式?

3.6 本章統合

3.7 練習題

### 3.1 本章宗旨

本章主要在復習實函數在微積分上會用到的一些性質. 須知實函數是談論微分及積分的主要對象.

實函數在高中數學中並沒有專章討論, 在本章裡不但收集了高中數學有關函數的部分, 並系統地介紹實函數的種種性質, 因為微積分學就是專門研討實函數在極限、微分及積分方面的數學, 探討相關的性質, 以便建立各種函數模式, 供其他科學之需.

須知數學上的各種運算都是函數的一種. 函數的重要性可見一斑. 跟前章一樣, 讀者只須在涉及到相關事項時再回頭查對一下即可.

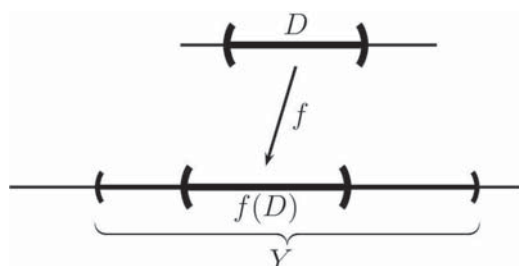
很多的題材需要函數來表示, 如自然界的各種演變情況. 實函數常以曲線來描述, 可使函數的對應情形一目了然. 可以這麼說, 能描出函數對應之曲線, 就比較能掌握函數的變化情形. 反過來說, 曲線可透過表示它的函數來探討它的種種性質.

## 3.2 認識實函數——實函數系

### Definition of A Real Function

A real function  $f$  from a set  $D \subset \mathbb{R}$  to a set  $Y \subset \mathbb{R}$  is a rule that assigns a unique element in  $Y$  to each element in  $D$ .

In this definition,  $D$  is called the *domain* (定義域) of the function, and  $Y$  is called the *codomain* (對應域), which contains the *range* (值域) of the function, denoted by  $f(D)$ .



上定義的解讀：由 $\mathbb{R}$ 的子集 $D$ 對應到亦為 $\mathbb{R}$ 之子集 $Y$ 的函數，是為一法則：對 $D$ 中之每一元素都指予 $Y$ 中的唯一元素。 $D$ 稱為定義域， $Y$ 稱為對應域， $f(D)$ 稱為值域——表由 $f$ 所對應的值所成的集合，即 $f(D) = \{f(x) : \forall x \in D\}$ 。又 $D$ 中的元素 $x$ 稱為自變數 (independent variables)， $Y$ 中的元素則稱為應變數 (dependent variables)。

在微積分學裡， $D$ 常取做區間，以此為定義域之函數就比較能把實數的一些性質傳遞出去。這就是為何專門討論實函數的用意所在。另外，本書採 $\text{dom} f$ 表 $f$ 之定義域。實函數常以代數式之等式表示其對應關係。

**例1** 如 $y = f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ ，請問 $f(x)$ 是實函數嗎？

**解** 所予函數為一實函數，蓋分母不恆為0，意即其定義域為整個實數集合。

**例2** 如 $y = f(n) = \frac{n-1}{n^2+1}$ ，其中 $n$ 為正整數。問 $y = f(x)$ 是實函數嗎？

**解** 所予函數不為一實函數，蓋正整數集合不是由區間組成，意即其定義域雖為正整數集合，但不包含任何實數區間。

**例3** 如 $f(1) = \text{鼠}$ ， $f(2) = \text{牛}$ ， $\dots$ ， $f(12) = \text{豬}$ ，此為一函數，但顯然不是實函數。

**例4** 求函數 $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-5x}}$ 的定義域。

**解** 除非特別指定，所予函數的定義域是以能使所予函數均有定義的所有實數所成的集合為原則。是以，所求之定義域為 $\{x : x^2 - 5x > 0\} = \{x : x > 5 \text{ 或 } x < 0\}$

**例5** 設  $f$  為定義於  $\mathbb{R}$  之實函數. 問  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  成立否?

**解** 不成立. 如  $f(x) = \sin x$ , 而取  $A = [0, 2\pi], B = [2\pi, 4\pi]$ . 則  $f(A \cap B) = \{f(2\pi)\} = \{0\}$ , 而  $f(A) \cap f(B) = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1]$ .

### 實函數之運算及性質——式之演算及性質

由於實函數都以實數集合做值域, 故可藉實數的運算來定義實函數的運算, 因而也具有跟實數一樣的運算性質, 如下示:

設  $f, g$  為實函數, 則

$$f = g \triangleq f(x) = g(x) \quad \forall x \in \text{dom}f \cap \text{dom}g$$

$$(f + g)(x) \triangleq f(x) + g(x) \quad \forall x \in \text{dom}f \cap \text{dom}g$$

$$(f - g)(x) \triangleq f(x) - g(x) \quad \forall x \in \text{dom}f \cap \text{dom}g$$

$$(f \cdot g)(x) \triangleq f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in \text{dom}f \cap \text{dom}g$$

$$(f \div g)(x) \triangleq f(x) \div g(x) \quad \forall x \in \text{dom}f \cap \text{dom}g$$

其中  $\text{dom}f$  表函數  $f$  之定義域的簡記.

讀者請注意, 本來函數是一種對應法則, 應無運算可言. 引進以上的定義, 意即上述定義式的左側之  $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$  是針對實函數的運算, 它們通通都是新的運算, 而右側則純粹是已知的實數運算 (都是依已有的運算來定義新的運算.) 可見實函數與實數很相似.

既然都是利用實數來定義的運算, 當然保有它很多的運算律. 由此易知, 實函數所成的集合配置著具有的運算律便形成了所謂的實函數系 (*The Real Function System*). 不過也有例外, 請見下例5.

引進函數運算的用意在於大多數的實代數函數都可拆解成變數  $x$  與常數之間的代數式. 是以, 只要掌握變數  $x$  的變動情形, 加上對運算的瞭解便可掌握大部分的代數函數, 不用再一一去討論, 節省不少時間.

在此要提醒的是, 函數的相等不是對應之值要相等且定義域也要相等, 而是對應之值只要在它們定義域的交集中相等即足. (請見下例1.) 惟定義域的交集須至少是區間, 否則函數之相等就會淪為條件相等即方程式. (見下例4)

**例1** 問  $\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$  嗎?

**解** 由函數之相等定義得知必相等, 因對  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} = \text{dom}f \cap \text{dom}g$ ,  $\frac{x^2-1}{x+1} = x-1$ .

**例2** 設  $f$  為定義於  $\mathbb{R}$  上的實函數, 問下列等式成立否? 其中  $x, y$  為任予實數.

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x+y) &= f(x) + f(y) & \text{b) } f(xy) &= f(x)f(y) \\ \text{c) } f(\sqrt{x}) &= \sqrt{f(x)} & \text{d) } f(x \div y) &= f(x) \div f(y), \text{ 但 } f(y) \neq 0 \end{aligned}$$

解 一般而言,均不成立.(除非  $f = i$ (自等函數).)

例3 設  $f$  為實函數. 問若  $f(x) = f(y)$ , 則  $x = y$  成立否? 其中  $x, y \in \text{dom} f$ .

解 不成立. 如  $f(x) = x^2$ , 則  $f(2) = f(-2) = 4$ , 但  $2 \neq -2$ .

例4 設  $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ ,  $g(x) = x^2 + 3$ . 若  $f(x) = g(x)$ , 求  $\text{dom} f \cap \text{dom} g$ .

解 因  $f(x) = g(x)$ , 即  $2x^2 - 3x + 5 = x^2 + 3$ . 化簡之得  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , 故得  $\text{dom} f \cap \text{dom} g = \{1, 2\}$ .

例5 試證或否證 (disprove): 若  $f, g$  為兩實函數, 均定義在區間  $[-1, 2]$  上, 且  $f \cdot g = 0$ , 即  $f(x) \cdot g(x) = 0 \quad \forall x \in [-1, 2]$ , 則  $f = 0$  或  $g = 0$ . (此處表  $f, g$  至少有一為零函數).

解 (經一番摸索後知本例須否證. 而此須利用到敘述的否定法, 故欲證本例相當於須找兩實函數不為零函數, 而它們的乘積卻是零函數.)

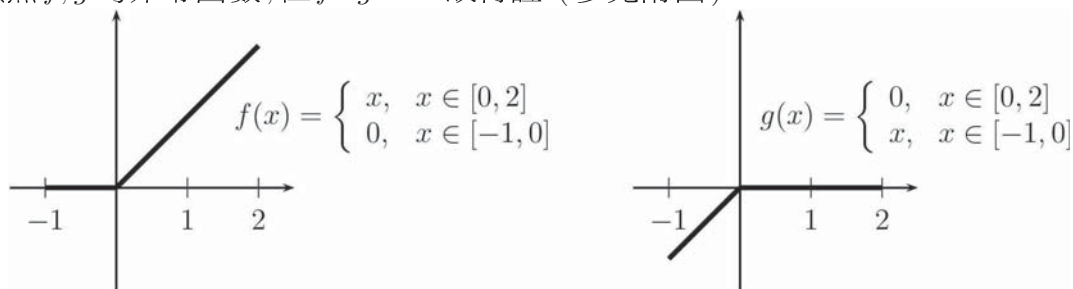
令

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{當 } x \in [0, 2] \text{ 時} \\ 0, & \text{當 } x \in [-1, 0] \text{ 時} \end{cases}$$

且

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{當 } x \in [0, 2] \text{ 時} \\ x, & \text{當 } x \in [-1, 0] \text{ 時} \end{cases}$$

則顯然  $f, g$  均非零函數, 但  $f \cdot g = 0$ . 故得證.(參見附圖)



註1: 由上例, 可知實函數與實數之間的不同所在 (請跟 p.30 之例1 比較). 實函數含有集團的意味, 意即是對整個定義域而言, 不像實數只能代表個別的數, 此乃實函數跟

實數最大之差別所在. 由此例得知若兩集團中彼此'互補', 意即若一實函數不等於零值時, 另一取為零之意, 則它們的乘積就會滿足所設.

註2: 上例中的0表零函數, 不是實數的0. 零函數為一實函數, 把定義域中的每一個實數都對應到實數0的一種函數. 它也是常數函數之一.

註3: 上性質請跟敘述: 設  $f(x), g(x)$  為定義於  $\mathbb{R}$  之兩實函數. 若  $\exists x \in \mathbb{R}$  使  $f(x) \cdot g(x) = 0$ , 則  $\exists x \in \mathbb{R}$  使  $f(x) = 0$  或  $\exists x \in \mathbb{R}$  使  $g(x) = 0$  — 做比較. 此特性在即將討論之極限中會常用及.

### 函數之合成 (Composition of Real Functions) 運算

實函數除了上列跟實數具有相同的運算外, 尚有一種不為實數運算所具者, 叫函數的合成 (composition), 它是一種代換法, 定義成:

$$(f \circ g)(x) \triangleq f(g(x)) \quad \forall x \in \text{dom } g \text{ and } g(x) \in \text{dom } f$$

亦即  $f(x)$  中的  $x$  代之以  $g(x)$ . 惟須知, 任予兩實函數未必均可合成. 函數的合成有下列性質: 設  $f, g, h$  為實函數, 且可合成之下, 則下列性質成立:

$$\text{不可交換律 (non-commutative law)} \quad f \circ g \neq g \circ f$$

$$\text{結合律 (associative law)} \quad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

例1 令  $f(x) = \frac{4x}{x^2-3}$  且  $g(x) = \sqrt{3x}$ , 首求  $(f \circ g)(12)$ , 次求  $(f \circ g)(x)$  並給其定義域.

解  $f(g(x)) = \frac{4\sqrt{3x}}{(\sqrt{3x})^2-3}$ . 可見  $f(g(12)) = f(6) = \frac{24}{33}$ .

$f \circ g$  之定義域為  $\{x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \geq 0\}$

例2 令  $F(x) = \sqrt{1 + \sin^2 x}$ . 試對合成分解  $F(x)$  成若干個簡單實函數的合成.

解 令  $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 1 + x, h(x) = x^2, l(x) = \sin x$ , 則  $F = f \circ g \circ h \circ l$

例3 請問下列命題成立否?

a) 設  $f, g, h$  為三實函數均定義在  $\mathbb{R}$  上. 若  $f \circ g(x) = f \circ h(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , 則  $g = h$ .

b) 設  $f, g, h$  為三實函數均定義在  $\mathbb{R}$  上. 若  $g \circ f(x) = h \circ f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ , 則  $g = h$ .

解 均不成立. (a) 如  $f(x) = |x|, g(x) = x, h(x) = -x$  則顯然  $f(g(x)) = f(h(x))$ , 但  $g(x) \neq h(x)$ .

b) 如  $f(x) = x^2, g(x) = x, h(x) = |x|$ , for  $x < 0$ .

**實函數之次序性 (ordering)**

實函數跟實數一樣, 也有次序性 (即大小關係)

設  $f, g$  為實函數,

$$f < g \triangleq f(x) < g(x), \forall x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g$$

注意, 實函數的次序性不具三一性 (Trichotomy Property):

即對任予兩實函數  $f, g$  來說,  $f < g, f = g, f > g$  三者不會恰一成立.

但推移性 (Transitive Property) 仍成立:

$$f < g \text{ 且 } g < h \Rightarrow f < h$$

**次序的運算律**

$$\text{加法律 } f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) + h(x) > g(x) + h(x), \quad \forall x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g.$$

$$\text{乘法律 } f(x) > g(x), h(x) > 0 \Rightarrow f(x) \cdot h(x) > g(x) \cdot h(x), \quad \forall x \in \text{dom} f \cap \text{dom} g.$$

**例** 設  $f, g, h$  為可合成之實函數. 若  $f > g$ , 則  $h \circ f > h \circ g$  且  $f \circ h > g \circ h$  成立否?

**解** 前者不成立. 如  $f(x) = x^2, g(x) = x^2 - 1$ . 而  $h(x) = -x$ , 則  $h \circ f(x) = -x^2$  而  $h \circ g(x) = -x^2 + 1$ . 顯然  $h \circ f \not> h \circ g$ . 後者成立, 因  $\forall x \in \mathbb{R} f(x) > g(x)$ , 故當其中的  $x$  以  $h(x)$  代入時, 即得  $f \circ h(x) > g \circ h(x)$ . 顯然  $f \circ h > g \circ h$ .

註: 由本例知無所謂的'次序合成律'. 本例之逆亦均不成立. (請參見練習第 21 題)

**3.3 實函數之基本性質:**

——一對一性、有界性、增減性、偶奇性、週期性、零性等

**1°. 一對一性**

已見諸前逆函數一欄 (p.9)

**2°. 函數之單調性**

設  $f$  為一實函數, 若  $\forall x_1, x_2 \in \text{dom}f, x_1 < x_2, f(x_1) < f(x_2)$ , 則  $f$  為嚴格遞增函數 (strict increasing function.) 把前敘述中的  $<$  改為  $\leq$  時, 則可把嚴格兩字去掉. 類似地, 可定義函數的遞減性 (只須把  $<$  改為  $>$  即得.) 若函數一路遞增或一路遞減則此函數亦稱為單調函數.

例 問下列哪一個函數在其定義上是單調函數?

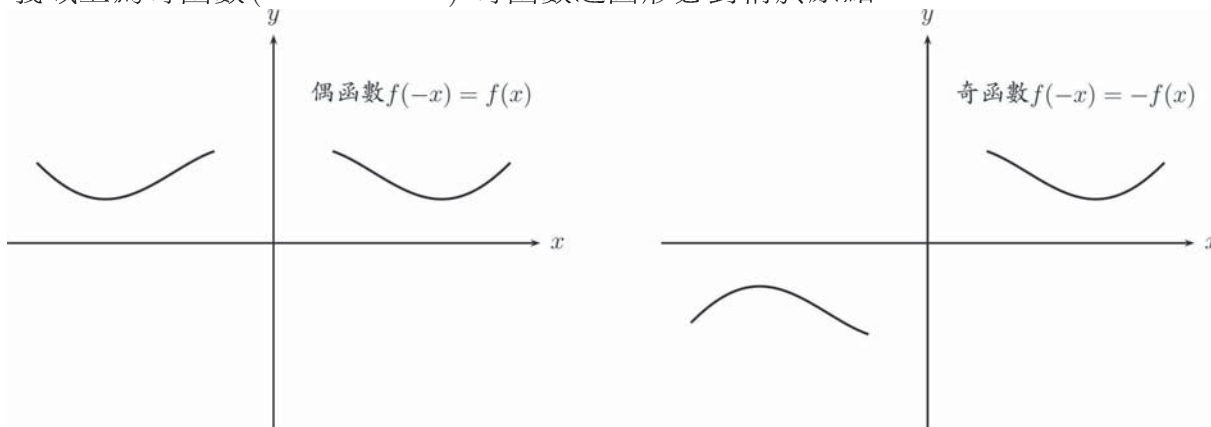
a)  $f(x) = 2x - 1$    b)  $g(t) = |x - 2|$    c)  $h(u) = \sin u$    d)  $F(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

解 只有 a) 是.

註: 實函數之單調性的檢定最有效的方法是利用函數之一階導數, 詳見第五章.

### 3°. 實函數的偶奇性

設  $f(x)$  為實函數, 若  $\forall x \in \text{dom}f, f(-x) = f(x)$ , 則稱  $f$  在其定義域上為偶函數 (even functions). 偶函數之圖形必對稱於  $y$  軸; 若  $\forall x \in \text{dom}f, f(-x) = -f(x)$ , 則稱  $f$  在其定義域上為奇函數 (odd functions). 奇函數之圖形必對稱於原點.



例 1 令  $f(x) = x^2$  則  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . 可見由定義知  $f(x)$  為  $\mathbb{R}$  上之偶函數. 令另  $g(x) = x^3$ , 則因  $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x), \forall x \in \mathbb{R}$ . 可見由定義知  $g(x)$  為  $\mathbb{R}$  上之奇函數.

由此例易知, 函數之偶奇乃由該函數中含  $x$  之偶、奇次方而得名. 為須知有些函數未必由  $x$  之乘冪組成, 如三角函數就無法以此做判定函數之偶奇.

例 2 令  $f(x) = \sin x$ , 則  $f(x)$  為一奇函數, 蓋對所有實數  $x$  恆有  $\sin(-x) = -\sin x$ . 令  $f(x) = \cos x$ , 則  $f(x)$  為一偶函數, 蓋對所有實數  $x$  恆有  $\cos(-x) = \cos x$ .

**例3** 令  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$ , 則  $f(x)$  既不是偶函數也不為奇函數, 蓋對所有實數  $x$  不恆有  $f(\pm x) = \pm f(x)$ . (複號同順)

**例4** 問下列敘述成立否?

- a) 設實函數  $f, g$  為奇函數, 則  $f + g$  亦為奇函數.
- b) 設實函數  $f, g$  為奇函數, 則  $f \cdot g$  亦為奇函數.
- c) 設實函數  $f, g$  為奇函數, 則  $f \circ g$  亦為奇函數.

**解** a) 不成立, 如  $f(x) = x, g(x) = -x$  則  $f(x) + g(x) = 0$  (常數函數不是一對一函數.)  
 b) 不成立, 如  $f(x) = x, g(x) = -x$  則  $f(x) \cdot g(x) = -x^2$  (二次函數不是一對一函數.)  
 c) 成立.  $\because f \circ g(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)), \forall x \in \mathbb{R}$ . 其中第二及第三等號用到假設  $g, f$  是奇函數性.

**定理** 任予實函數恆可由適當的偶與奇函數表示之: 即

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

其中  $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$  為偶函數,  $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$  為奇函數.

**例5** 設  $f(x)$  為任予實函數, 試證:

- a)  $f(x) + f(-x)$  必為偶函數.
- b)  $f(x) - f(-x)$  必為奇函數.

**解** 令  $F(x) = f(x) + f(-x)$ , 則易知  $F(x) = F(-x)$ . 可見得證  $F$  為偶函數. 同理, 令  $G(x) = f(x) - f(-x)$ , 則易知  $G(-x) = -G(x)$ . 可見得證  $G$  為奇函數.

#### 4°. 函數之週期性 (periodicity)

設實函數  $f$  具  $f(x+p) = f(x), \forall x \in \text{dom} f$ , 其中  $p$  為與  $x$  無關之正實數. 則稱  $f$  為以  $p$  為週期之函數.

**例** 如正弦函數  $\sin x$  為週期函數, 以正數  $2\pi$  為週期. 三角函數都是週期函數之例.

#### 5°. 函數之有界性

設  $f$  為一實函數, 若  $f(D)$  (即  $f$  之值域, 為一實數子集合) 為有界, 則稱  $f$  為有界實函數 (Bounded Real Functions). 如同實數之子集合一般 (見 p.34), 可討論其最小上界 (suprema) 及最大下界 (infima), 分別以  $\sup f, \inf f$  表之.

例1 問下列哪一個函數在其定義上是有界函數？若是，請求其  $\sup f$  及  $\inf f$ 。

a)  $f(x) = 2x - 1$    b)  $g(t) = |x - 2|$    c)  $h(u) = \sin u$    d)  $F(x) = \sqrt{x^2 - 5}$

解 只有 c) 是。  $\sup \sin = 1, \inf \sin = -1$ 。

欲證明函數之極限存在時，常須求所予函數之有界。開闢本欄之用意在此。（請參考第四章第2節 p.82.）

例2 若  $f(x) = \frac{x-5}{x^2+1}$ ，試證  $|f(x)| \leq 1$ ，當  $1 < x < 3$  時。

解 在所予  $x$  之範圍下，使所予函數  $|f(x)|$  之分子變大分母變小便可找到其上界。茲以  $x = 3$  代分子中之  $x$  再以  $x = 1$  代分母中的  $x$ ，可得證本例。

例3 若  $f(x) = \frac{x-5}{x^2+1}$ ，試求  $|f(x)|$  之下界，當  $x \geq 100$  時。

解 在所予  $x$  之範圍下，使所予函數  $|f(x)|$  之分子變小分母變大便可找到其下界。但因所予函數分母的次方大於分子者，故當越大時，所予函數趨於零，可得知本例欲求之下界為 0，即  $|f(x)| \geq 0$ 。

例4 求  $f(x) = \frac{x^2-5}{2x+3}$  在  $-1 < x < 5$  時之上下界，若存在時。

解 先將所予函數化成帶分式型： $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + \frac{-11/4}{2x+3}$ 。欲求上界時，以  $x = 5$  代入整式中之  $x$ （使其變大），次以  $x = 5$  代入分式中之  $x$ （使該分式變小，因是負的）如此可得所予函數之上界，為  $20/13$ 。同理，欲求下界時，以  $x = -1$  代入整式中之  $x$ ，次以  $x = -1$  代入分式中之  $x$  可得所予函數之下界為  $-3$ 。

註：欲控制函數之變化時，原則上，須設法使其中的變數分離或化成單項（利用配方法），這是比較保險的解法。如上例之化成帶分式即是此用意之一。惟上例是特例，不用改變原式，直接代適當之  $x$  值，亦可得正解。不過，須知這只是湊巧，不是通例。

另外，如欲求所予函數在  $-1 < x < 5$  之值域時，最好透過函數之圖形。否則容易出錯。不過此例比較特殊，所求之值域即由其上下界決定，為  $(-3, 20/13)$ 。

### 實函數之值域與實函數之有界之間

兩者之間存有密切關連。能求得所欲函數之值域，即相當於找到其上下界，反之則否。一般而言，函數之值域不好找，所以常退而求其次，以其上下界取代之。如何求得所予函數之上下界？由於函數之上下界不唯一，所以很難有確定的方法以資遵循。找它們說容易也可，說不容易也沒錯，其差別就在個人功力。讀者不妨參考上例之註，或多或少有所助解此項難處。

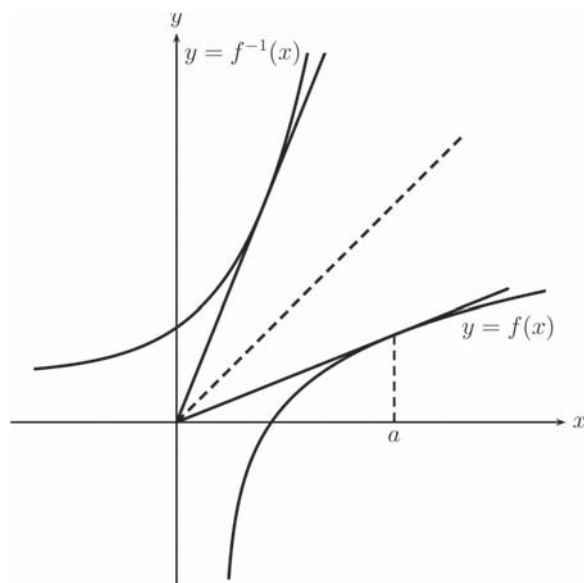
## 6°. 可逆性

## 逆實函數 (Inverse Real Functions) 之存在

把實函數  $y = f(x)$  直接對應回去，若仍為單值時，則此對應法有構成一實函數，稱之為所予函數  $f$  之逆函數 (inverse function)，常以  $f^{-1}(\cdot)$  (唸成  $f$  inverse of); 若直接對應回去不是單一值時，則如此的對應法便無法成為函數，此時的實函數就無逆函數存在。總之，逆函數也是函數之一，是對某所予函數做反對應罷了。

以式子來表示時則為：對所予實函數  $f$  來說，若有一實函數  $g$  使  $f \circ g = i$ ，且  $g \circ f = i$ ，其中  $i$  表自等函數 (identity function)，定義成  $i(x) = x \quad \forall x \in \text{dom}i$ ，則稱  $g$  為  $f$  之逆函數，如此的實函數  $g$  常以  $f^{-1}$  表之。

須知任予一實函數未必有逆函數存在，有逆函數存在的先決條件是什麼？想讀者也猜得出來了。這是下定理的主意。有逆函數的函數特稱之為可逆函數 (invertible function)。



**定理** 一實函數為可逆函數的充要條件是它須為一對一函數。

**證** (請參照第一章 p.15 例 4)

由上知，可逆函數必為一對一函數。

讀者須知道的是，逆函數之‘逆’是對函數之合成運算而取的。它具有如下的性質：

**重要性質** 若  $f, g$  均為可逆函數且可合成，則 i)  $f$  之逆函數必唯一且  $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

ii)  $f \circ g$  亦為可逆且  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .

證 i) 設  $f$  有兩個逆函數  $h_1, h_2$ , 則由定義知  $h_1(f(x)) = x = h_2(f(x)), \forall x \in \text{dom } f$ . 但  $f$  為一對一, 故  $h_1(u) = h_2(u), \forall u \in f(D)$ . 得證其一. 由此知  $f$  之唯一逆函數為  $f^{-1}$ , 則亦知  $f^{-1}$  為可逆函數, 並以  $f$  為其逆函數. 故  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

ii)

$$(f \circ g)^{-1} \circ (f \circ g) = i \text{ (由定義知)}$$

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g = g^{-1} \circ i \circ g = i \text{ (因合成滿足結合律)}.$$

再由 i) 即得證 ii).

例 1 問下列敘述成立否?

- a) 設實函數  $f, g$  為可逆函數, 則  $f + g$  亦為可逆函數.
- b) 設實函數  $f, g$  為可逆函數, 則  $f \cdot g$  亦為可逆函數.
- c) 設實函數  $f, g$  為可逆函數, 則  $f \circ g$  亦為可逆函數.

解 a) 不成立, 如  $f(x) = x, g(x) = -x$  均為可逆函數, 但  $f(x) + g(x) = 0$  不可逆 (因常數函數不是一對一函數.)

b) 不成立, 如  $f(x) = x, g(x) = -x$  均為可逆函數, 但  $f(x) \cdot g(x) = -x^2$  不可逆 (因二次函數不是一對一函數.)

c) 成立, 理由見下例.

例 2 設  $f, g$  為兩實函數均定義在  $\mathbb{R}$  上. 若  $g, f$  均具有逆函數, 試證  $f \circ g$  亦為可逆函數. 且  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ .

證 只須證  $g^{-1} \circ f^{-1}$  確為  $f \circ g$  之逆函數即可. 由定義知, 只須查證兩者之合成是否為自等函數即足.

$$(g^{-1} \circ f^{-1}) \circ (f \circ g) = (g^{-1} \circ (f^{-1} \circ f) \circ g) = g^{-1} \circ g = i,$$

另一方面

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = i$$

得證.

有時一非可逆函數為了需要, 可將其定義域加以限制, 使之成為一對一函數, 即具可逆性. 常見之例為反三角函數, 另舉一例如下.

例 3 令  $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$ . 試將  $x$  加限使  $f$  變為可逆函數, 並求其逆函數.

解  $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$  顯然不是一對一函數, 但若加限  $x \geq 0$  後, 則可使  $f(x) = x^2$  變成一對一函數, 即  $f$  具可逆性. 其逆函數為  $f^{-1} = \sqrt{x}$ , 蓋  $f \circ f^{-1} = f(f^{-1}) = (f^{-1})^2 = (\sqrt{x})^2 = x, \forall x \geq 0$ .

註: 須知定義域的加限不是只限一種限法. 如上例, 亦可加限  $x$  為  $x \leq 0$ . 不過, 所求的逆函數變為  $f^{-1}(x) = -\sqrt{-x}$ .

例 4 試求正弦函數  $\sin x$  之反函數.

解 須知  $\sin x$  並非為其定義域上之一對一超越函數, 由上知欲求其反函數須加限其定義域. 只要能使其在加限後的定義域上本均可被接受, 但還是以簡潔好用為上. 一般是取閉區間  $[-\pi/2, \pi/2]$ , 在此區見上之正弦函數顯然具一對一之特性, 故有逆函數, 常以  $\sin^{-1} x$  表之, 並有  $\sin \circ \sin^{-1} x = x, \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$  且  $\sin^{-1} \circ \sin x = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

### 7°. 實函數之零性

設  $f(x), g(x)$  為定義於  $\mathbb{R}$  之實函數, 若  $\exists x$  使  $f(x) \cdot g(x) = 0$ , 則  $\exists x$  使  $f(x) = 0$  或  $g(x) = 0$ .

註 1: 上敘述中的 0 是實數之 0 不表零函數, 屬方程式之相等. 請讀者分清楚.

註 2: 因  $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$  利用實數之性質即可得上述結論. 這則性質在探討極限時會常用到, 本書特以實函數之零性稱之. 上性質可推廣至有限多個實函數.

## 3.4 實函數之分類及圖示

實函數是實數與實數之間的對應, 對應的方式百百種, 不勝枚舉. 以座標系上它們所對應的點  $(x, f(x))$  來圖示它們對應方式, 不但簡潔而有效, 而且讓人印象具體而深刻. 所以實函數都以座標系上的圖示來呈現, 此乃本節之主意所在.

在高中數學裡, 談過有關方程式與圖形的課題, 歸屬座標幾何學的範圍. 實函數實即兩變數方程式的特殊情況, 由此可知實函數的圖示可視為屬於 '方程式與圖形' 範疇, 無任何新的內容.

不過, 在高中數學裡所討論的方程式與圖形只限於先描若干個點再以平滑曲線連結起來完成之. 對曲線的結構無法進一步交代. 想進一步交代, 只有訴諸微分法 (詳見第五章第 xx 節.) 本章屬複習之篇, 對實函數之圖示也只能延續高中數學的方法來進行而已.

### 實函數之分類 (Classification of Real Functions)

初等實函數約分為四大類: 代數函數、超越函數、分段定義之實函數及混合型.

**I. 代數函數 (algebraic functions):** 可由  $x$  經有限多次之加減乘除及開根 (這些運算便是所謂的代數運算者) 而得的函數. 如多項式函數、有理 (分式) 函數、根式函數等.

i) 多項式函數 (polynomial functions): 由變數  $x$  乘幂再配上常數 (即係數) 組成, 有次數可言者.

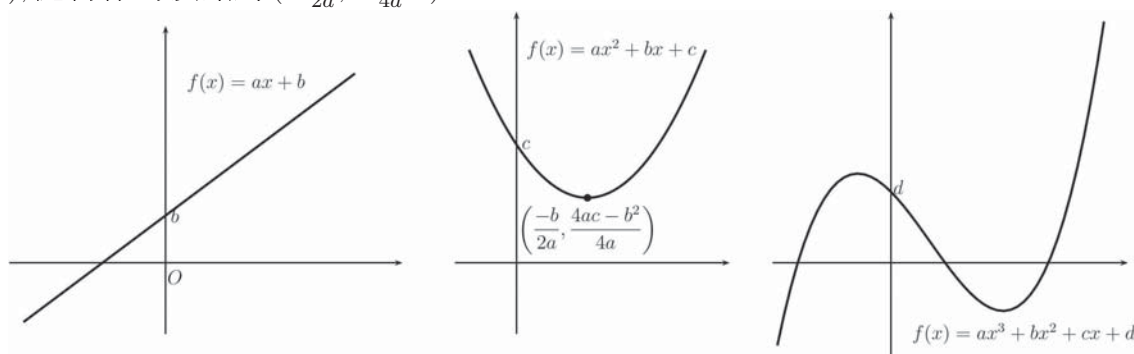
a) 一次函數 (亦稱線性函數) (linear functions):  $y = f(x) = ax + b, a \neq 0$ .

其中  $a$  表一次函數之圖形 (為一直線) 的斜率 (Slope);  $b$  表直線之截距 (Intercept).

註: 若  $a = 0$ , 則函數退化為常數函數 (Constant Functions):  $f(x) = b$ ; 當  $b = 0$  時, 函數特稱為零函數 (Zero Function).

b) 二次函數 (quadratic functions):  $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ .

其中  $a$  表二次函數圖形 (為一拋物線) 之開口大小 ( $a$  正時開口向上;  $a$  負時開口向下); 拋物線的頂點為  $(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$ .



c) 三次函數 (cubic functions):  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$ .

圖形為一三次曲線, 一般而言, 呈 "N" 型當  $a > 0$  時; 呈倒 "N" 型當  $a < 0$  時.

d) 四次函數 (Quartic functions)

圖形為一四次曲線, 一般而言, 呈 "W" 型當  $a > 0$  時; 呈 "M" 型當  $a < 0$  時.

d)  $n$  次多項式函數 ( $n$ -th polynomial functions)  $y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$ .

仿上推廣之.

ii) 有理函數或分式函數 (rational functions): 由兩個多項式函數相比而成者.

分母為零時, 大都有水平漸近線 (horizontal asymptotes) 存在.

iii) 根式函數 (Functions involving Roots): 由有理函數取根號而得者.

**II. 超越函數 (transcendental functions):** 無法由  $x$  經有限次之代數運算而得者.

初等實函數中的超越函數就有如實數中的無理數一般, 只能用特別記號來表示, 如大家熟悉的三角函數及指數對數函數即屬超越函數. 就像無理數可用無窮非循環小數

表示一樣,超越函數就常以收斂的冪級數 (convergent power series) 表示. 至於冪級數的種種性質請見下一欄.

i) 三角函數 (trigonometric functions) 及反三角函數 (Inverse Trigonometric Functions) 三角函數亦稱圓函數 (circular functions), 因其中的正弦函數與餘弦函數  $\sin, \cos$  就可定義為在單位圓上對應於圓心角  $\theta$  (取徑度量) 之點的座標  $(x, y)$ . 三角函數具週期性 (periodicity).

ii) 指數與對數函數 (exponential and logarithmic functions)

設  $f(x)$  為指數函數, 則  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ , 恆有  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ . (此即指數三大律之一:  $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ .) 取逆函數時, 即為對數函數, 其特性為:  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+, f^{-1}(xy) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$

### III. 絕對值函數、高斯函數 (Gauss Functions)、分段定義之函數 (Piecewise Defined Functions)、冪級數

a) 絕對值函數:  $f(x) = |x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$  表實數線上點  $x$  至原點之距離.

b) 高斯 (Gauss) 函數:  $f(x) = [x]$  其中  $[x]$  表一整數  $n$ , 具  $n \leq x < n+1$  者.

c) 分段定義之函數: 如絕對值函數亦可表成

$$|x| = \begin{cases} x & \text{當 } x \geq 0 \text{ 時} \\ -x & \text{當 } x < 0 \text{ 時} \end{cases}$$

可見絕對值函數亦為分段定義的一種. 他如高斯函數亦可表成分段函數如下.

$$[x] = \begin{cases} \dots & \\ -1 & \text{當 } -1 \leq x < 0 \text{ 時} \\ 0 & \text{當 } 0 \leq x < 1 \text{ 時} \\ 1 & \text{當 } 1 \leq x < 2 \text{ 時} \\ \dots & \end{cases}$$

至於冪級數, 請見第七章第 7.2 節.

### IV. 混合型: 混合代數函數及超越函數者

讀者須知的是, 在微積分裡探討的主要對象是實函數的微分與積分, 其中的實函數便是指上列諸函數, 將會一一進行討論.

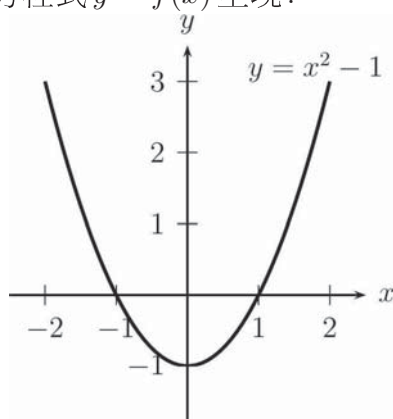
## 實函數之圖示 (Graphing of The Real Functions)

設  $f(x)$  為已予實函數, 則其在平面座標系上之圖示由點集合  $\{(x, y) : y = f(x)\}$  呈現.

**例 1** 試平面座標系上圖示函數  $f(x) = x^2 - 1$ .

**解** 由高中數學裡學到方程式  $y = x^2 - 1$  之圖形為開口向上之拋物線, 頂點為  $(0, -1)$ . 參見附圖.

由上知, 函數  $f(x)$  之圖示由方程式  $y = f(x)$  呈現.



讀者在高中時學過的'方程式與圖形'就在此發揮用處了. 惟須知給予方程式或其圖示未必就可得知一函數, 須看對  $x$  軸引之垂直線是否與所予圖示相交而定; 不交則已, 能交時只能交於單一點而已. 這是檢驗一圖形是否為一函數圖形的唯一方法. (參照習題第 1 題.)

在本節裡, 我們提供若干常用的實函數及其圖示供參考.

**例 2** 令  $f(x) = |x|$ . 試由  $y = f(x)$  之圖形, 求下列各函數之圖形.

- a)  $y = f(x - 2)$    b)  $y = 2f(x)$    c)  $y = f(x) + 1$    d)  $y = 3f(x - 2) + 1$

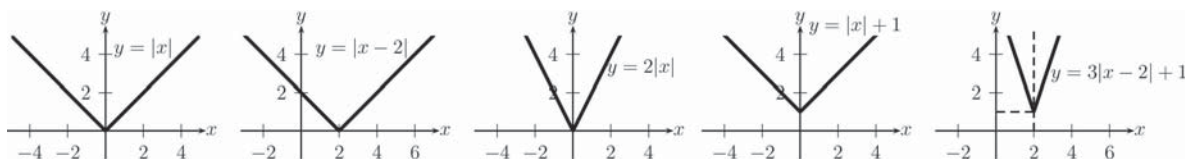
**解** 已知絕對值函數之圖形為過原點呈 "V" 字形.

a)  $y = |x - 2|$  之圖形為頂點平移至點  $(2, 0)$  之絕對值函數圖形.

b)  $y = 2|x|$  之圖形為過原點  $(0, 0)$  之絕對值函數圖形, 不過 "V" 字更尖些 (二倍高).

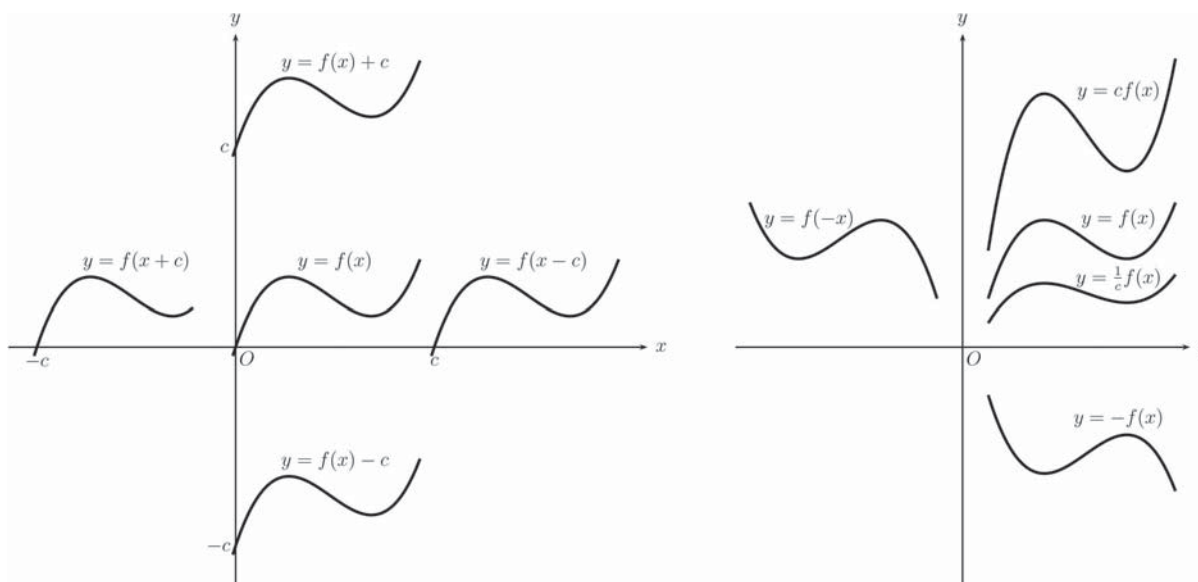
c)  $y = |x| + 1$  之圖形為頂點平移至點  $(0, 1)$  之絕對值函數圖形.

d)  $y = 3|x - 2| + 1$  之圖形為頂點斜移至點  $(2, 1)$  之絕對值函數圖形, 不過 "V" 還要尖 (三倍高).



註：在數學上，常藉基本函數之圖示，經由變換（如平移、對稱、旋轉、放大或縮小）而得所予函數之圖示，如上例所示。

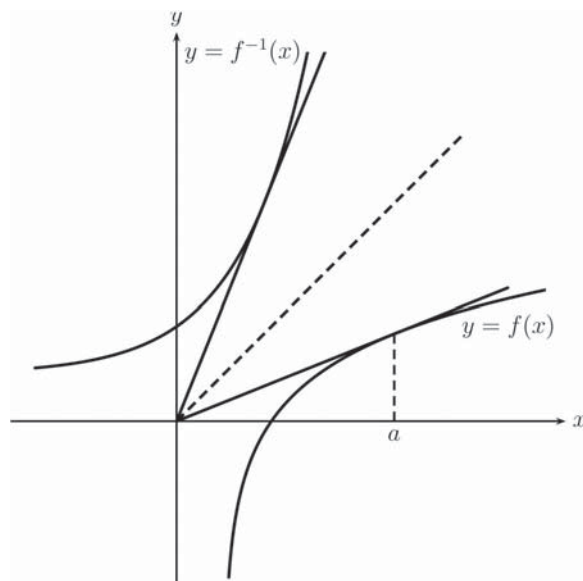
一般而言，只要給予函數  $y = f(x)$  之圖形，透過上示變換，即可描出函數  $y = af(b(x - c)) + d$  之圖形，其中  $a, b, c, d$  為定實數。如下圖所示。



註： $d$  表圖形上下平移  $|d|$  單位，視  $d$  之正負而定； $c$  表圖形往左右平移  $|c|$  單位，視  $c$  之正負而定； $b$  表  $x$ -軸上之單位放大或縮小  $|b|$  倍，視  $b > 1$  或  $0 < b < 1$  而定，當  $b < 0$  時，表所予圖形須對稱於  $y$ -軸； $a > 0$  表  $y$ -軸上之單位放大或縮小，視  $a > 1$  或  $0 < a < 1$  而定，當  $a < 0$  時，整個圖形須對稱於  $y$ -軸。

### 逆函數之圖示

逆實函數也是實函數之一，當然它也有它的圖示 (diagram.) 但它既為某函數之逆，其圖示亦必與該函數有所關連，此關連就是對稱性——對直線  $y = x$  對稱。



爲什麼一可逆函數之圖形會與其逆函數之圖形對稱於直線  $y = x$ ? 理由說明如下:  
 一般而言, 若實函數  $y = f(x)$  爲可逆函數, 則其逆函數可由  $x, y$  互換位置而得  
 即  $x = f(y)$ , 此以習慣方式表示時, 不就是逆函數  $y = f^{-1}(x)$  嗎? 須知當方程式  
 $f(x, y) = 0$  中的  $x, y$  互換位置時, 所得之方程式爲  $f(y, x) = 0$ , 其對應的圖形必與原方  
 程式  $f(x, y) = 0$  之圖形對稱於過原點, 斜角爲  $\pi/4$  之直線  $y = x$ .

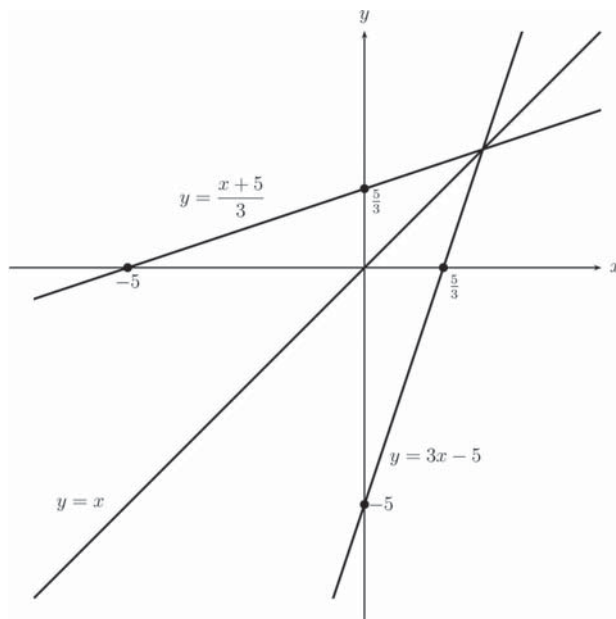
註: 讀者已知斜率互爲負倒數的直線必垂直, 那請問斜率互爲倒數之直線又有何特  
 性? 在座標系上以過原點, 斜角爲 45 度之直線爲分角線之角的兩邊會是所予函數與  
 其逆函數在對應點處所引之切線者. (見附圖)

例 1 令實函數  $f(x) = 3x - 5$ , 試求  $f$  之逆函數並圖示之.

解 按定義知, 若實函數  $g$  具有與  $f$  之合成滿足  $(f \circ g)(x) = x, \forall x \in \text{dom}g$  且  $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in \text{dom}f$  時,  $g$  便是所予實函數  $f$  之逆函數. 將  $f(x) = 3x - 5$  代入時, 得  
 $(f \circ g)(x) = 3g(x) - 5 = x$ . 由最後等號化簡得  $g(x) = (x + 5)/3$ . 此即爲所予函數  $f$  之  
 逆函數. 圖示請參見附圖.

註 1: 直觀而言, 所予函數是把  $x$  先對應到 3 倍  $x$  再減去 5 那它的逆函數就是反回去, 即  
 應爲先將  $x$  加上 5 再除以 3 回來. 此即爲  $\frac{x+5}{3}$ .

註 2: 讀者可以自己驗算所求之  $g(x)$  亦滿足另一定義式  $(g \circ f)(x) = x, \forall x \in \text{dom}f$ . 但在此  
 求逆函數常只須用其一即可. 既然如此, 也許讀者有疑慮, 爲什麼定義中要有兩個  
 定義式? 在更高階的數學裡, 討論到逆函數時, 會有左右逆函數之分. (因合成不具交  
 換律之故.) 此處所談之逆函數則應爲左右均具之逆函數, 只是常把 '左右' 兩字省略  
 罷了.



**例 2** 試證  $\ln x$  與  $e^x$  互為逆函數.

**解** 須知  $\ln x$  與  $e^x$  均為它們各自定義域上之一對一超越函數, 並具  $e^{\ln x} = x \forall x > 0$  及  $\ln e^x = x \forall x \in \mathbb{R}$  之特性. 這些性質實即互成為逆函數所需之合成關係.

### 3.5 相關題材: 怎樣還原函數? 怎樣建立模式?

以上的討論, 都是在實函數給予之下, 對它可能具有的性質逐一探討. 實際應用時, 在實函數未給予之下, 如何從實際觀察或實驗得出之一些資訊或資料 (data), 配合上述剖析的一些性質來謀求合適的實函數, 這才是介紹函數題材的主意. 像醫生在診病時, 除了問診之外, 也要斷診. 不是只問問病患的情況即足, 還是須綜合各種可能得到的資訊來斷診, 以達到醫病的終極目標. 須知拆錶容易裝錶難, 問診容易斷診難, 要從一些資料中找出合適的函數來滿足所予資料著實不易的. 請參考下面諸例.

惟須知大學以前學的數學大都著重在找未知數, 如求解各種方程式; 在大學裡唸的微積分就不太一樣, 著重在找函數, 即找對應的規則, 亦即建立模式. 這是讀者須先認清的. 設立本章的主意即在此.

**例 1** 台北正常的溫度一月 15 日為攝氏 10 度, 而七月 15 日為攝氏 38 度之間. 多年的統計下來, 台北的天氣約略遵循正弦曲線 (sinusoidal curve) 在變化時,

a) 試求  $C, A, a$  與  $b$  之值滿足合理的台北天氣模式

$$T(t) = C + A \sin(a(t + b)),$$

其中  $t$  表從一月起的月份。

b) 利用上模式，試估計五月十五日的正常溫度。

**解**

a) 由於季節是以每十二月之周期做循環的，所以所需之函數之周期為  $t = 12$ 。故  $\frac{2\pi}{a} = 12$ ，由此得  $a = 2\pi/12$ 。振幅為最高點與最低點之差之半，在此情況為  $A = \frac{1}{2}(38 - 10) = 14$ 。至於  $C$  之值則為最高點與最低點之中點，屬  $y$  軸的平移，故  $C = 24$ 。至此知  $T(t)$  呈如下之型

$$T(t) = 24 + 14 \sin\left(\frac{2\pi}{12}(t + b)\right).$$

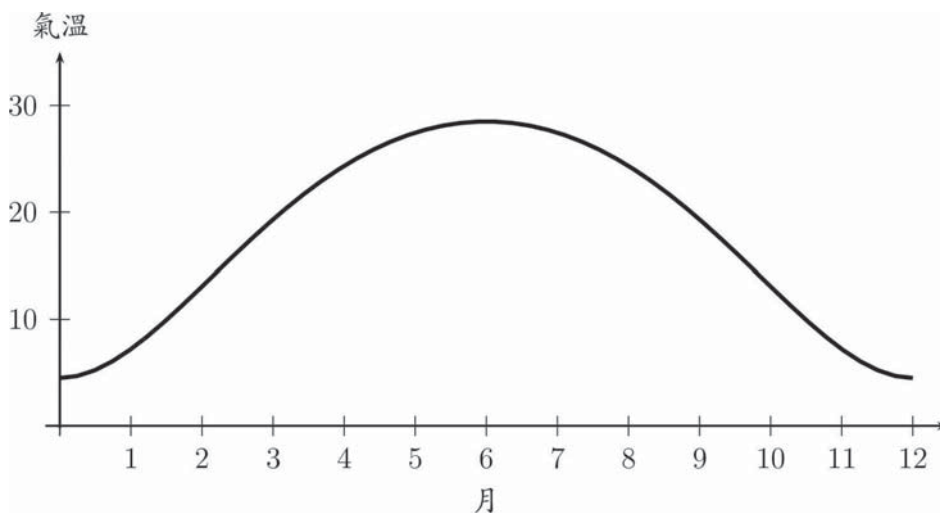
至於常數  $b$  如何找起？這是屬於圖形平移的問題。已知最低溫度為  $10^\circ C$ ，它發生在一月十五日，約在一月中旬，即  $t = 1/2$  時。（請參照附圖）。須知函數  $24 + 14 \sin(2\pi t/12)$  當  $2\pi t/12 = -\pi/2$  時為最低點，亦即  $t = -3$ 。可見所予曲線須向右平移  $1/2 - (-3) = 7/2$  單位。此即  $b = -7/2$ 。因此得

$$T(t) = 24 + 14 \sin\left(\frac{2\pi}{12}(t - 7/2)\right).$$

圖示如下圖，其中  $t$  表月份。

b) 五月十五日相當於所予模式當  $t = 4.5$  時。故由模式得

$$T(4.5) = 24 + 14 \sin(2\pi(4.5 - 3.5)/12) = 24 + 14 \times 1/2 = 14 + 7 = 31$$



可見五月十五日台北的溫度按此模式估計為攝氏  $31^{\circ}$ . 此估計與實際情況是否相近, 請讀者查對一下看看.

註: 讀者一定很疑惑本例中的模式從何而來? 這就是本章探討實函數的主要用意—建立模式 (Model-building). 從實際觀察所得的數據能看出其所對應的函數就是一大工程.

**例2** 波義耳定律 (Boyle's Law): 在一定量的氣體, 在一定的溫度下, 氣體的體積與壓力成反比. (確立氣體變化模式).

**解** 讀者從國中理化學到波義耳定律, 它描述自然界之氣體與壓力之間的變化關係, 亦即建立了氣體與壓力之間的變化模式. 它就是一種簡易的數學模式. 波義耳經一連串的實驗所得之數據裡發現在一定量的氣體及一定的溫度下, 氣體的體積與壓力有成反比的簡略特性. 須知變數間有成反比之性質便是一種函數關係—此即波義耳定律之所指.

註: 模式的建立是在找某現象之近似函數, 跟微積分所要的求函數之近似值有所不同, 請讀者留意.

### 3.6 本章統合

欲探究函數的變化規則, 是不是須先探究其變化之大小. 欲探究函數變化之大小情形, 是不是又以其差之大小為圭臬. 其差之大小是不是又以其對自變數差之大小之比方能顯示出來. 再以極限表示其相鄰之差的變化情形是不是更能顯示其變化的主髓?! 這就是第五章的主題.

當自變數  $x$  趨近定實數時, 對應的變數  $f(x)$  是否亦趨近定數  $l$ ? 這是不是也是探討函數變化情況的一種有效方法呢? 這是下章之主題.

這些都不外是一心一意想建立實函數裡能替代除法的概念所在.

### 3.7 練習題

1. 下列關於  $x$  與  $y$  之方程式中, 何者可決定函數  $y = f(x)$ ?

a)  $x = \sqrt{2y+1}$       b)  $x = \frac{y}{y+1}$       c)  $x^2 + y^2 = 1$

d)  $xy + y + x = 1, x \neq -1$

2.a) 試求實函數  $f(x) = \frac{x}{x^2-9}$  的定義域.

b) 試求實函數  $f(x) = \sqrt{4-x^2}$  的定義域.

3. 試證: 若  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq M(x - y)^2$ , 其中  $M$  為一正數, 則  $f$  為常數函數.

4. 設  $f$  為定義於  $\mathbb{R}$  上之函數,  $A, B$  為  $\mathbb{R}$  之子集, 試證下列等式成立.

a)  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$    b)  $f(A^c) = f(A)^c$    c)  $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ .

5. 設  $f$  為定義於  $\mathbb{R}$  上之函數,  $A, B$  為  $\mathbb{R}$  之子集, 若  $f^*(A) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A\}$  (表由會對應到  $A$  的所有實數 (屬  $f$  之定義域) 所成的集合), 亦即  $f^*(A) \subset \text{dom } f$ . 試證下列等式成立.

a)  $f^*(A \cup B) = f^*(A) \cup f^*(B)$    b)  $f^*(A \cap B) = f^*(A) \cap f^*(B)$    c)  $f^*(A^c) = f^*(A)^c$ .

6. 設  $p(x), q(x)$  為兩多項式函數, 試證若方程式  $p(x) \cdot q(x) = 0$ , 則兩方程式  $p(x) = 0$  或  $q(x) = 0$ . 至少有一成立. (註: 其中之 0 表零多項式函數.)

7. 問下列敘述成立否?

a) 設實函數  $f, g$  為遞增函數, 則  $f + g$  亦為遞增函數.

b) 設實函數  $f, g$  為遞增函數, 則  $f \cdot g$  亦為遞增函數.

c) 設實函數  $f, g$  為遞增函數, 則  $f \circ g$  亦為遞增函數.

8. a) 試將函數  $p(x) = (x^2 + 5)^{2/3}$  分解成爲  $f \circ g$  之型.

b) 試將函數  $p(x) = \cos^2(x + 5)$  分解成爲  $f \circ g \circ h$  之型.

9. 試求下列各函數的逆函數.

a)  $f(x) = x^3 + 5$    b)  $f(x) = \ln(2x - 3)$    c)  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

d)  $f(x) = \cos(4x - 1)$ .

10. 設  $f$  為實函數, 並滿足  $f(x + y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ , 試證

$$i) f(x - y) = f(x) \div f(y)$$

$$ii) f(mx) = f(x)^m, \text{ 其中 } m \text{ 爲整數}$$

11. 令  $f, g$  為兩實函數, 並滿足

$$f(x \pm y) = f(x)g(y) \pm g(x)f(y) \text{ (複號同順)}, g(x + y) = g(x)g(y) - f(x)f(y) \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

試證 i)  $f(0) = 0, g(0) = 1$    ii)  $f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$

iii)  $f(x)^2 + g(x)^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ .

12. 試求下列個函數之值域.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x^2+3} \quad \text{b) } g(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 2}$$

13. 試指出下列函數何者為偶函數, 何者為奇函數何者都不是?

$$\text{a) } f(x) = |x| \quad \text{b) } f(x) = |x - 7| \quad \text{c) } f(x) = \frac{x-5}{x+1}$$

$$\text{d) } f(x) = \sqrt{x+4} \quad \text{e) } f(x) = -x \quad \text{f) } f(x) = \sin x^2$$

14. 令

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{當 } x \neq 1 \text{ 時} \\ 3 & \text{當 } x = 1 \text{ 時} \end{cases}$$

問所予函數是偶函數, 是奇函數, 還是都不是.

15. 下列的敘述, 何者成立? 何者不成立?

a) 兩偶函數之和仍為偶函數.

b) 兩偶函數之積為偶函數.

c) 兩偶函數之商為偶函數.

d) 兩奇函數之商為偶函數.

e) 兩偶函數之合成為偶函數.

16. a) 試證  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  為奇函數.

b) 試求 a) 中之  $f$  的逆函數.

17. 令  $f(x) = 3x^2 + x - 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . 試將  $x$  加限使  $f$  變為可逆函數惟須使值域最大, 並求其逆函數.

18. a) 試由  $y = \sin x$  之圖形描方程式  $y = \frac{1}{2} \sin(2x) + 1$  之圖形.

b) 試由  $y = \ln x$  之圖形描方程式  $y = \frac{1}{2} \ln(2x) + 1$  之圖形.

19. a) 設  $f, g$  為兩實函數均定義在  $\mathbb{R}$  上. 若  $g \circ f$  為一對一, 試證  $g$  必為一對一函數.

b) 續 a), 設  $f, g$  為兩實函數均定義在  $\mathbb{R}$  上. 若  $g \circ f$  為一對一, 問  $f$  亦為一對一函數嗎?

20. a) 設  $f, g, h$  為實函數, 且可合成. 問  $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$  成立否? (注意等號右側須先合成後相加.)

b) 設  $f, g, h$  為實函數, 且可合成. 問  $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$  成立否? (注意等號右側須先合成後相加.)

21. a) 設  $f, g, h$  為實函數, 且可合成. 若  $f \circ h > g \circ h$ . 問  $f > g$  成立否?

b) 設  $f, g, h$  為實函數, 且可合成. 若  $h \circ f > h \circ g$ . 問  $f > g$  成立否?

22. 設  $f_0(x) = x/(x+1)$  且  $f_{n+1} = f_0 \circ f_n, n = 0, 1, 2, \dots$ , 試求  $f_n$  有關  $x$  之公式. ( $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$ .)

23. 試求下列各函數在所予區間上的上界及下界 (若存在的話).

a)  $f(x) = \frac{x^2-5}{2x+1}, |x| < 1$ .    b)  $f(x) = \frac{2x-1}{|x|-3}, -1 < x < 2$ .

24. Kepler's Law (刻普勒定律) 下表中  $d$  表示諸行星距太陽的平均距離 (以地球距太陽的距離為測度單位), 而它們的週期以  $T$  表示 (為運轉的年數).

行星	d	T
水星(Mercury)	0.387	0.241
金星(Venus)	0.723	0.615
地球(Earth)	1.000	1.000
火星(Mars)	1.523	1.881
木星(Jupiter)	5.203	11.861
土星(Saturn)	9.541	29.457
天王星(Uranus)	19.190	84.008
海王星(Neptune)	30.308	164.784

a) 試建立適合上列數據之乘冪模式 (Power Functions).

b) 已知行星運轉之 Kepler 定律為行星運轉週期的平方正比於其距太陽之平均距離的立方. 問 a) 中的模式是否確證此敘述?

25. 人口成長律模式:

試以下表之數據建模二十世紀世界人口成長律為三次多項式函數, 並利用所得之模式估計 1925 年的人口數.

年度	人口 (百萬計)	年度	人口 (百萬計)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

## 第三章習題解答

1. a) Yes,  $y = \frac{x^2-1}{2}$ .

b) Yes,  $y = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$ .

c) No,  $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

d) Yes,  $y = \frac{1-x}{x+1}, x+1 \neq 0$ .

2. a)  $\{x : x^2 - 9 \neq 0\} = \{x \neq \pm 3\}$

b)  $\{x : 4 - x^2 \geq 0\} = \{-2 \leq x \leq 2\}$

3. (反證) 若  $f(x)$  不為  $\mathbb{R}$  上之常數函數, 則  $\exists x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$  使  $f(x) \neq f(y)$ . 取  $M_0 = |f(x) - f(y)|/2(x-y)^2$  時, 代回所予假設, 則產生  $|f(x) - f(y)| > M_0(x-y)^2$  之不合理情況. 故得證.

4. a)

$$\begin{aligned} \forall y \in f(A \cup B) &\Leftrightarrow \exists x \in (A \cup B) \ni y = f(x) \\ &\Leftrightarrow x \in A \text{ or } x \in B \ni y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \text{ or } y \in f(B) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A) \cup f(B) \end{aligned}$$

其中  $\ni$  表 such that. (以下亦同)

b)

$$\begin{aligned} \forall y \in f(A^c) &\Leftrightarrow \exists x \in A^c \ni y = f(x) \\ &\Leftrightarrow x \notin A \ni y = f(x) \\ &\Leftrightarrow y \notin f(A) \\ &\Leftrightarrow y \in f(A^c) \end{aligned}$$

c) 舉一反例即可. 如  $f(x) = \sin x$ , 取  $A = [0, \pi], B = [\pi, 2\pi]$ , 則  $A \cap B = \{\pi\}, f(A \cap B) = \{0\}$ , 而  $f(A) \cap f(B) = [0, 1]$ .

5. a)

$$\begin{aligned} \forall x \in f^*(A \cup B) &\Leftrightarrow f(x) \in (A \cup B) \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ or } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^*(A) \text{ or } x \in f^*(B) \\ &\Leftrightarrow x \in f^*(A) \cup f^*(B) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\forall x \in f^*(A \cap B) &\Leftrightarrow f(x) \in (A \cap B) \\
&\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ and } f(x) \in B \\
&\Leftrightarrow x \in f^*(A) \text{ and } x \in f^*(B) \\
&\Leftrightarrow x \in f^*(A) \cap f^*(B)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\forall x \in f^*(A^c) &\Leftrightarrow f(x) \in A^c \\
&\Leftrightarrow f(x) \notin A \\
&\Leftrightarrow x \notin f^*(A) \\
&\Leftrightarrow x \in f^*(A)^c
\end{aligned}$$

註： $f$  與  $f^*$  之最大不同之性質在於交集部分，請讀者特別注意。

6. (請與例5p.54做比較.) 實函數與多項式函數之最大差異所在. 因  $p(x)q(x) = 0$  裡的 0 是零多項式時, 就表它不是方程式, 而是恆等式, 故非  $p(x), q(x)$  有一為零多項式不可.

7. a) 成立,  $\forall x_1 > x_2$ , 若  $f(x_1) > f(x_2), g(x_1) > g(x_2)$ , 則  $f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$   
 b) 不成立, 如  $f(x) = x, g(x) = x - 5$ , 則  $f(x) \cdot g(x) = x^2 - 5x$  (二次函數不是遞增函數.)  
 c) 成立,  $\forall x_1 > x_2$ , 令  $y_1 = g(x_1), y_2 = g(x_2)$  則  $(g(x_1) > g(x_2))$ , (因  $g$  遞增), 隨之得  $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$  (因  $f$  也遞增, 只要可合成之下.)

8. a)  $f(x) = x^{2/3}, g(x) = x^2 + 5$ .  
 b)  $f(x) = x^2, g(x) = \cos x, h(x) = x + 5$ .

9. a)  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$     b)  $f^{-1}(x) = \frac{e^x+3}{2}$   
 c)  $f^{-1}(x) = \frac{b-dx}{cx-a}, cx-a \neq 0$     d)  $f^{-1}(x) = \frac{\cos^{-1}x+1}{4}$

10. 首證  $f(0) = 1$ : 由題設得  $f(0) = f(0)^2$  (令  $x = y = 0$ ), 故得  $f(0) = 1$ .

次證  $f(-x) = 1/f(x)$ : 由題設得  $f(0) = f(x) \cdot f(-x)$  (令  $y = -x$ ), 故得  $f(-x) = 1/f(x)$ , (其中因  $f(0) = 1$ ).

i)  $f(x-y) = f(x+(-y)) = f(x)f(-y) = f(x)/f(y)$

ii)  $f(mx) = f(x+x+\cdots+x)$  (共  $m$  項)  $= f(x) \cdot f(x) \cdots f(x)$  ( $m$  項)  $= (f(x))^m$ .

11. 首證:  $f(0) = 0, g(0) = 1$ : 令  $x = y = 0$  得  $f(0) = f(0)g(0) + g(0)f(0) = 2f(0)g(0)$ , 故  $f(0) = 0$  或  $g(0) = 1/2$  (後者不合, 因  $g(0) = g(0)^2 - f(0)^2 = g(0)^2$ .) 由此亦得  $g(0) = 1$  (因  $f(y) = f(0)g(y) + g(0)f(y)$ .)

次證:  $f(x^2) + g(x)^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . 得此式之前須先推得  $f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$  (此請讀者自行證明). 又  $f^2(x+y) + g^2(x+y) = (f^2(x) + g^2(x))(f^2(y) + g^2(y))$  再令  $x = -y$  代入前式即可得證欲證式.

12. a) 令  $\frac{x-2}{x^2+3} = k$ , 則  $kx^2 - x + 3k + 2 = 0$ , 因  $x \in \mathbb{R}$ , 故判別式  $(-1)^2 - 4k(3k+2) \geq 0$ . 由此得  $\frac{-2-\sqrt{7}}{6} \leq k \leq \frac{-2+\sqrt{7}}{6}$ . 所求值域為  $[\frac{-2-\sqrt{7}}{6}, \frac{-2+\sqrt{7}}{6}]$ .

b) 令  $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 2} = k$ , 則  $\sin x - k \cos x = 1 + 2k^2$ , 亦即  $\sqrt{k^2 + 1} \sin(x - \alpha) = 1 + 2k^2$ , 其中  $\alpha$  為適當角度. 因  $x \in \mathbb{R}$ , 故  $|\frac{1+2k^2}{\sqrt{k^2+1}}| \leq 1$ . 解此不等式得  $-4/3 \leq k \leq 0$ . 所求值域為  $[-4/3, 0]$ .

註: 如上兩例所示, 欲求所予函數之值域, 可令所予函數之值為  $k$  再進行求其範圍. 不過這只限特殊函數, 如二次函數或三角函數型者. 至於一般函數, 就必須用到微積分了. (詳見第五章一階導數檢定極值法 p.127). 有最大值及最小值之函數, 其值域就是由它們所組成之區間.

13. a) Even    b) Nether even nor odd    c) Nether even nor odd  
d) Nether even nor odd    e) Odd    f) Even

14. 都不是.

15. a) 成立. 設  $f, g$  為兩偶函數, 則  $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ .

b) 成立. 設  $f, g$  為兩偶函數, 則  $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$ .

c) 成立. 設  $f, g$  為兩偶函數, 則  $(f \div g)(-x) = f(-x) \div g(-x) = f(x) \div g(x) = (f \div g)(x)$ .

d) 成立. 設  $f, g$  為兩奇函數, 則  $(f \div g)(-x) = f(-x) \div g(-x) = -f(x) \div -g(x) = (f \div g)(x)$ .

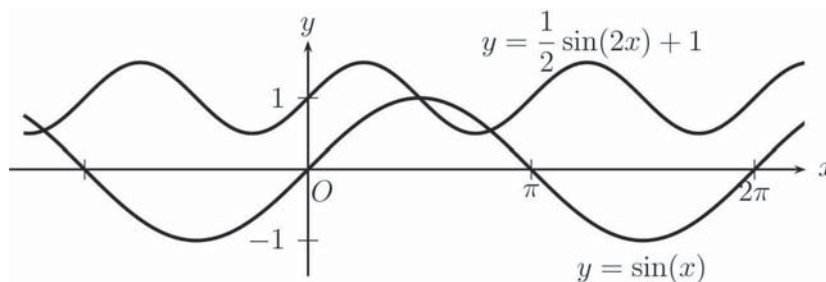
e) 成立. 設  $f, g$  為兩偶函數, 則  $(f \circ g)(-x) = f((g(-x))) = f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ .

16.a) 提示:  $-x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ .

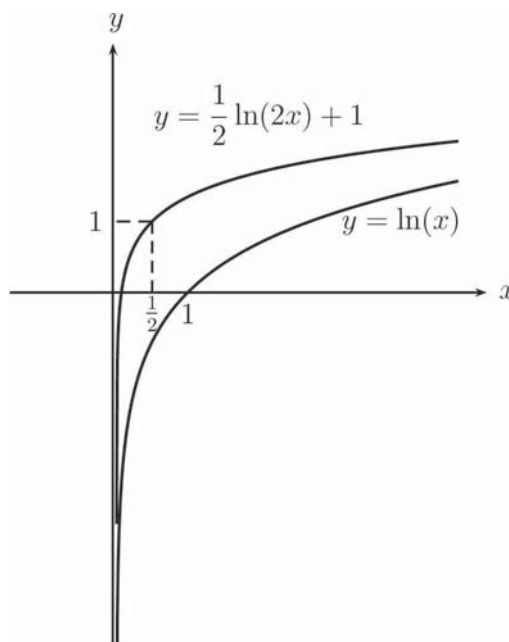
b)  $f^{-1}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ .

17. 配方後知  $x \geq \frac{-1}{6}$ .  $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+49}{3}} + \frac{-1}{6}$

18. a)



b)



19. 均成立. 設  $x_1 \neq x_2$ , 則由題設得  $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ . 此時若  $f(x_1) = f(x_2)$ . 則由於  $g(x)$  爲一函數可見不合. 由此可得  $f$  非一對一不可. 由此亦得  $g$  亦必一對一.

20. a) 不成立. 如  $f(x) = x^2, g(x) = -x, h(x) = |x|$ , 則  $h(f(x) + g(x)) = |x^2 - x|, h(f(x)) + h(g(x)) = |x^2| + |-x|$ , 顯然不等.

b) 成立. 因  $(f + g) \circ h(x) = ((f + g)(h(x))) = f(h(x)) + g(h(x)) = (f \circ h + g \circ h)(x)$ .

21. 均不成立. (如取  $f(x) = \frac{1}{2}x, x > 0; g(x) = x, x > 0; h(x) = -x$ , 則  $f(h(x)) > g(h(x)), x > 0$ , 但顯然  $f(x) < g(x), x > 0$ . 同理, 雖  $h(f(x)) > h(g(x)), x > 0$ , 但  $f(x) < g(x), x > 0$ )

註: 本例之逆亦不成立.

$$22. f_1(x) = f_0(x) \circ f_0(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{f_0(x)}{f_0(x)+1} = \frac{x}{2x+1}. \text{ 今設 } f_n(x) = \frac{x}{nx+1}, \text{ 則 } f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x)) = \frac{f_n(x)}{f_n(x)+1} = \frac{x}{(n+1)x+1}.$$

$$23. \text{a) } f(x) = \frac{x^2-5}{2x+1}, |x| < 1 \text{ 無上下界 (因 } x = -1/2 \text{ 會使分母爲 0.)}$$

b)

$$f(x) = \frac{2x-1}{|x|-3} = \begin{cases} 2 + \frac{5}{x-3} & \text{當 } 2 > x \geq 0 \text{ 時} \\ -2 + \frac{7}{x+3} & \text{當 } -1 < x < 0 \text{ 時} \end{cases}$$

當  $x \in [0, 2)$  時, 因  $x = 0$  時所予分式函數最大, 爲  $1/3$ , 下界爲  $-3$  (當  $x = 2$  時); 當  $x \in (-1, 0)$  時, 所予函數當  $x = -1$  時有上界爲  $3/2$  當  $x = -1$  時; 有下界爲  $1/3$  當  $x = 0$  時. 綜合起來得  $f(x) = \frac{2x-1}{|x|-3}, -1 < x < 2$ . 之上界爲  $3/2$ , 下界爲  $-3$ .

註: 一般而言, 欲求所予函數之上界時, 一方面取使分子越大之  $x$  值, 另一方面取使分母越小之  $x$  值即可達成; 欲求所予函數之下界時, 則反過來取. 請記住, 函數之上下界不存在則已, 若存在, 未必唯一.

$$24. \text{a) } T = d^{3/2}$$

b) 是

$$25. y \approx 0.0012937x^3 - 7.06142x^2 + 12.823x - 7743770; 1914 \text{ 百萬.}$$