第二章

實數之基本性質

內容

2.1 本章宗旨

本章主要在復習實數在微積分裡會用到的一些性質.須知實數是微積分裡使用的基本語言,是實函數對應的對象.

2.2 認識實數—-實數系

實數集合,包括有理數與無理數,常以 $\mathbb{R}$ 表之,考慮運算加法與乘法運算,並考慮次序關係(即大小關係(ordering))以及對應的各種運算性質(如下示)便構成所謂的實數系 (The Real Number System).
設 $a, b, c \in \mathbb{R}$,則下列運算性質成立(在此假設讀者熟悉怎麼做實數之各種運算):

$$\text{封閉性 (property of closure)} \quad a + b \in \mathbb{R}, a \cdot b \in \mathbb{R}$$

交換律(commutative law) $a+b=b+a, a\cdot b=b\cdot a$

結合律(associative law) $(a+b)+c=a+(b+c), (ab)c=a(bc)$

分配律(distributive law) $a(b+c)=ab+ac$ 等號右側表先乘後加

次序三一性 $\forall a,b\in\mathbb{R}, a<b, a=b, a>b$恰一成立

次序運算律 $a<b\Rightarrow a+c<b+c, ac<bc \quad (c>0)$

次序推移性 $a<b,$ 且$b<c\Rightarrow a<c$

實數系還有另外重要特性爲所謂的完備性(completeness property):
任予收斂的實數列必在實數系中找到極限值.((詳見第四章末之'實數列之收斂'一節)
完備性是實數系獨有的特性,它有許多不同的同義描述,上一行者爲其中之一.一般可視所需,擇其中之一做公設(postulate),不用證明.
以上諸運算性質在讀者看來認爲當然成立,無須再此大費周章一番.是的沒錯.不過如你熟悉的減法與除法,就沒有以上的運算性質了.由此可見,以上諸性質不能視爲都當然成立,以爲有沒有它們無所謂吧.
註:在實數系裡,注重的運算可集中在加法與乘法兩種,因減法可視爲加法的一種,可由引進加法反元素(亦即負數)即足;除法亦可視爲乘法的一種,可由引進乘法反元素(即倒數)而成.

例1 試證:若$a,b\in\mathbb{R}$,且$ab=0$,則a,b中至少有一爲0.

證 i)若$a=0$,則表a,b中確有一爲0.故得證本例.
ii)若$a\neq 0$,則a有倒數.由假設$ab=0$,利用運算律,兩邊乘以a^{-1}得$b=0$.
iii)由i)及ii)得證:若$a,b\in\mathbb{R}$,且$ab=0$,則a,b中至少有一爲0.

註:提供此例,有些讀者可能認爲太簡單了.不過請讀者參閱p.54之例5,就知道實數有此特性並非不值得一提之性質.其實,此例所代表之原理在解方程式時常用到.又如上例之解中,就用到不少實數系的運算性質,請讀者費心查證一下.又在證的過程中,就是要強調不讓結論之否定(即a,b同時不爲0)成立.本例之主意在告訴讀者;任兩非零之實數相乘絕對不爲零.

例2 試證:若$a\in\mathbb{R}$,則$a^2\geqq 0$.

證 i)若$a=0$,則顯然$a^2=0$.可見沒跟所要結論相違.

ii) 若 $a \neq 0$,則由實數之次序三一性知 $a > 0$ 或 $a < 0$. 當 $a > 0$ 時,由次序運算律知 $a^2 = aa > a0 = 0$,(兩邊乘以正數 a 得);當 $a < 0$ 時,同理可得 $a^2 > 0$.
iii) 由 i) 及 ii) 得證:若 $a \in \mathbb{R}$,則 $a^2 \geqq 0$.

例 3 試證:設 a, b 爲定實數,若 $\forall x, y \in \mathbb{R}, ax + by = 0$ 則 $a = b = 0$.

證 由假設知,當 $(x, y) = (0, 1), (-1, 0), (1, 1)$ 分別代入所予等式時,得 $a \cdot 0 + b \cdot 1 = 0, a(-1) + y \cdot 0 = 0$ 及 $a + b = 0$. 故得 $a = b = 0$. 得證本例.
註:本例亦可利用反證法,再透過例 1 得證. 如 a, b 中有一爲 0 則由例 1 可得假設 $ax + by \neq 0$(因至少有一 x, y 不爲 0.) 由反證法得知本例成立.

附記:實數系之建立

實數系可視爲由自然數系 (The Natural Number system) 一一擴充 (extension) 而建立的. 自然數又稱算計數 (counting numbers). $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$. 自然數系就是由自然數集合上考慮加法與乘法運算以及運算性質構成.
整數系是由自然數系擴充而得,須使方程式 $x + a = b$(其中 $a, b \in \mathbb{N}$) 有解而成,意即,使減法在自然數系中具封閉性,亦即在自然數系裡引進負數. 整數集合常以 $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \cdots\}$ 表示.
有理數系是由整數系擴充而得,須使方程式 $ax = b$(其中 $a, b \in \mathbb{Z}$ 且 $a \neq 0$), 意即,使除法在整數系裡具封閉性,亦即在整數系裡引進分數. 有理數集合常以 $\mathbb{Q} = \{b/a : a, b \in \mathbf{Z}, a \neq 0\}$ 表示.
至於實數系,就沒有辦法如上泡製而得,意即無法由使某種方程式有解來建立,或者說,爲某運算具封閉性而得. 實數集合常以 $\mathbb{R}$ 表示.
其實實數系還是可藉某運算而產生,只是它不是加減乘除或開根式之一,而是新的運算—取極限,換言之,屬於無窮的範圍.
實數系就是爲使任予一實數列若收斂時,其極限必在其中而建立的,意即使取極限(可視爲一運算) 具封閉性者.

註 1: 擴充 *(extension)* 在數學裡有特別的意義:數系的擴充是指原數系中的運算在新的數系裡一樣運行自如之意.
茲舉分數之加法爲例說明如下:分數之相加須先通分母在相加分子,何不定義成將所予分數之分子與分母各別相加呢?即

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m + p}{n + q}.$$

須知這是幾乎是每位初學的學生都很容易犯的毛病,學生很疑惑的是何以分數的乘法就可以將分子與分母各別相乘而得,而相加則否?. 這是不是一開始很爲難初學學

生的地方？推究其因只是爲保持整數的運算可以擴充到有理數系的緣故，蓋若定義分數的加法爲分子分母各別相加時，如此所得之分數和就會跟當這些分數回歸整數時之相加不一致，如$3+2=5$，當$3,2$分別用分數$\frac{6}{2},\frac{10}{5}$表示時，則按新定義的分數加法爲$\frac{16}{7}$顯然不等於5跟它們是整數時的相加不同，（當用其他分數表示時，所得結果又不同.）可見整數的加法無法擴充到有理數系.經過通分過的分數加法則可擴充到有理數系，在此只有請讀者自己查證了.

數學就是這麼一回事，你儘管引進任何新的'東西'，不過就是不能引進跟既有的'東西'相違背，意即新瓶不僅能裝新酒，就是裝舊酒也無妨，而且若新舊併裝時亦不改其'味'—-有容乃大.

註2：當兩數相減時，須引進負數；當兩數相除時，須引進分數，因有時會除不盡，當取正數的各種開根時，須引進根號；其他如取各種函數值時，亦都須引進新記號，等等.爲方便計，在數學上，就須有數的表示法來統一.

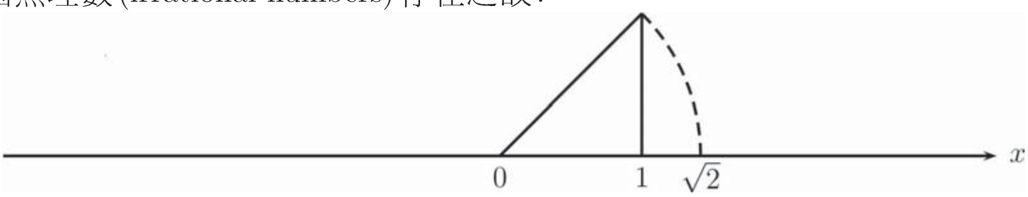
數的統一表示法就是十進位制，是以10的乘冪所成的級數之和構成.如1032.5783是$1\cdot10^3+0\cdot10^2+3\cdot10+2+5\cdot10^{-1}+7\cdot10^{-2}+8\cdot10^{-3}+3\cdot10^{-4}$簡寫.

再如$\sqrt{2}$爲無理數.又由實際開方可得它等於$1.41421\cdots$.故

$$\sqrt{2}\triangleq 1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\cdots.$$

2.3 實數軸或實數線—實數之圖示

請問任予線段之長可用有理數表示嗎？依讀者的經驗，會認爲是可以的.因習慣上或實用上都是取近似値（即有理數）來代替的緣故.實際上呢？這在古希臘時代就知道了，如股長爲1之等腰直角三角形，其斜邊長是$\sqrt{2}$，就不是有理數.由此可見，想要建立有理數與直線上的點之間有一對一對應是無法辦到的，其因是除有理數外，尚有無數多個無理數 (irrational numbers) 存在之故.



是以，想建立數與直線上的點之間有一對一對應關係，只取有理數是不夠的.這顯示有理數集合不具所謂的閉聯性 (continuum.) 有理數與無理數的聯集即實數集合就可以跟直線上的點之間建立一對一的對應.似此，每一點都有一實數對應者的直線便稱爲實數軸 (The Real Number Axis.)（參見上圖.）實數軸亦稱實數線 (The Real Number

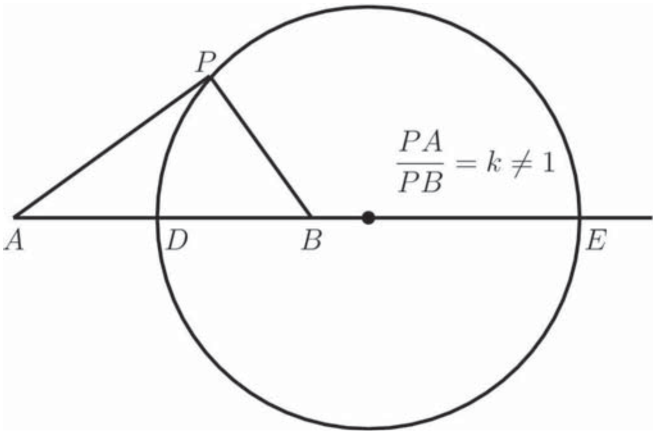
Line).實數軸上每一點所對應的實數便稱爲該點的座標.反過來說,實數軸上的每一實數所對應的點可視爲該實數的圖示.實數軸好像一把尺,其上刻有實數,可用來量各種長度.

由於實數軸上的點與實數集合之間有了一對一的對應關係,所以往後直線上的點與實數之間常不分彼此,視成等同化(identified.)

平面座標系之建立

讀者在高中所學的座標幾何學裡的平面座標系便是由互相垂直的實數軸(橫軸叫X軸,縱軸叫Y軸,交點就是原點(origin))建立的.在取定的座標系上,平面上的點與數對(x, y)之間也建立了一對一的對應關係.這樣兩者及平面上的點與實數對之間也可等同化了.有了平面座標系,各種幾何圖形便可透過代數方程式來探討,反過來,代數上的方程式也可利用它在平面座標系的圖示來掌握.這不是把幾何與代數的關係拉近了嗎!?如下例所示.

例　求平面上距兩定點之距離比爲定數之點所決定的集合(幾何軌跡問題.)



解　如圖所示,

在取定的座標系上,再取兩定點$(a, 0), (-a, 0)$.令(x, y)爲滿足所予條件之點,則按距離公式知

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}/\sqrt{(x+a)^2+y^2} = k,$$

其中k表本例中之定數.將上等式化簡之,可得

$$(1-k^2)x^2 - 2ax(1+k^2) + (1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2 = 0.$$

顯然的,由座標幾何學中'方程式與圖形'得知合乎條件的點所成的集合爲一圓(circle)(當$k \neq 1$時)或一直線(當$k = 1$時,爲前者之退化情況),即兩定點所決定之線段的中垂線.

註1: 此圓就是有名的阿波羅圓(Apollonius circle).
註2: 此爲平面幾何學上的軌跡問題,想以幾何方法直接進行,一般來說,不太容易.改以取座標系再按題意建立合於所予條件之方程式來解,如上示,是不是要容易多了!?

2.4 實數之完備性

實數之完備性(Completeness of Real Numbers)就是指實數集合完美無缺之意.亦即在談數列之收斂性時就不會找不到極限之意.在有理數系裡,由有理數所成的數列有可能找不到極限.這是因有理數集合沒有完備性之故.實數系就是因引進無理數,才使實數系具有閉聯性(continuum),閉聯性亦稱完備性,是很多分析學上定理存在的由來.

實數之子集合的有界性(Bound of Real Subsets)
實數集合 $\mathbb{R}$ 本身沒有界限,但其子集合未必沒界限,所謂界限在此處之意思是指該集合中的實數不會趨近正負無限大,意即其中的實數會小於某定數也會大於另一定數,以式子表示時爲 $-M' < x < M$,其中 x 爲所指之子集合的元素.
界限有上下之分,而有界是指有上下界之意.如上之示例,M 就是所指集合之上界(upper bound),$-M'$ 便是下界(lower bound).實數的子集合若有界時,便稱此集合有界(bounded),即上方有界(bounded above)與下方有界(bounded below)之合稱.

例 不等式 $x^3-6x^2+11x-6<0$ 的解集合爲實數之子集合,不爲有界集合 $\{x<1, 2<x<3\}$,上方有界,以3爲上界之一,取10亦可爲上界,惟此解集合無下界.

實數之完備性

實數的非空子集合若有上界(Upper Bound),則此集合必有最小上界(Least Upper Bound or Supremum).

針對上述的完備性,有下列幾點補充.
i) 若所予子集合爲有限集合時,則此集合之最小上界就是該集合中的最大元素.
ii) 若所予子集合爲無限集合時,則此集合之最小上界就是該集合中的所有上界(會有無限多個)中最小的一個.
若 u 表所予集合 S 之最小上界時,則它具有 $\forall \varepsilon > 0, \exists t \in S$ such that $t > u - \varepsilon$. (表 u 之左邊一點點就有 S 的元素.) 當此非空子集合由遞增實數列組成時,那最小上界就是該數列收斂的極限值.

iii) 同上,實數的非空子集合若有下界(lower Bound),則此集合必有最大上界(Greatest Lower Bound or Infimum).讀者須知此亦爲實數之完備性之一.
iv) 集合 S 之最小上界常以 $\sup S$(supremum of S) 表之.集合 S 之最大下界常以 $\inf S$(infimum of S) 表之.

註:實數之非空子集合不外四種可能性:
i) 同時有最小上界及最大下界;如集合 $[-2,3]$.
ii) 有最小上界,但無最大下界;如集合 $(-\infty,3]$ 或 $(-\infty,3)$
iii) 無最小上界,但有最大下界;如集合 $[-2,\infty)$ 或 $(-2,\infty)$
iv) 既無最小上界,也無最大下界;如集合 $(-\infty,\infty)$.

例1 令 $S=\{1,2,3\}$ 則易知 S 不空集,且有上界(有很多個),由完備性知 S 有最小上界,爲3.

例2 令 $S=(1,2)$(開區間)則易知 S 爲有界集合,其上界可爲任何不小於2之實數,而2是最小上界;其下界可爲任何不大於1之任何實數,而1是最大下界.

例3 設 $A,B\subset\mathbb{R}$ 且非空,試證:若 $A\subset B$ 且 B 有上界,則 $\sup A\le\sup B$.

證 若否(反證法),則 $supA > supB$. 令 $\varepsilon=(supA-supB)/2>0$, 則 $\exists x\in A$ 使 $x\ge supA-\varepsilon>supB$. 可見 $x\notin B$ 與假設 $A\subset B$ 不合.

定理1 阿基米德性(Archimedean Property):對每一實數 x, 必有自然數 n_x 使 $x<n_x$.

證 假如所予敘述不成立,則對所有 $n\in\mathbb{N}, n\le x$. 可見,x 爲集合 $\mathbb{N}$ 的一上界.在由實數的完備性得,非空集合 $\mathbb{N}$ 有最小上界,茲以 u 表之.考慮 $u-1$ 時,則由最小上界之定義知,必有另一自然數 m 使 $u-1<m$, 亦即 $u<m+1$, 但 $m+1\in\mathbb{N}$,可見不合 u 是最小上界之身份.故得證本定理.

例4 利用實數完備性,證明 $\sqrt{2}$ 存在.(即方程式 $x^2=2$ 必有正實數解.)

證 令 $S=\{s\in\mathbb{R}: s\ge 0, s^2<2\}$, 則易知 $1\in S$, 故 $S\ne\emptyset$ 且以2爲上界之一. (蓋若 $t>2$, 則 $t^2>4$, 致而 $t\notin S$.) 由實數之完備性知 S 有最小上界.事實上,這個最小上界就以讀者所知之符號 $\sqrt{2}$ 表示.別忘了,$\sqrt{2}$ 只是一個代表具有平方後會小於2之實數所成的集合的最小上界.它的確切值究竟等於多少?在此只能告訴讀者的是,它之平方既不會大於2,也不會小於2之一實數而已.(按此,由實數之三一律知它的平方必等於2.)
令 $u=\sqrt{2}$,

i) 設 u 平方後大於 2: 由最小上界之特性知 $u-\varepsilon \notin S$, 其中 ε 爲適當正數. 由 S 之元素特性知 $(u-\varepsilon)^2 \geq 2$. 此顯然不合理.(蓋前式展開得 $2-2u\varepsilon+\varepsilon^2 < 2$ 當 ε 夠小的正數時.)
ii) 設 u 平方後小於 2: 由最小上界之特性知 $u+\varepsilon \in S$, 其中 ε 爲適當正數. 由 S 之元素特性知 $(u+\varepsilon)^2 < 2$. 此亦顯然不合理.(蓋前式展開得 $2+2u\varepsilon+\varepsilon^2 \nless 2$ 當 ε 夠小的正數時.)

定理 2 有理數的稠密性 (Dense Property): 利用實數完備性, 證明若 x, y 爲有理數, 且 $x<y$, 則必有另一有理數 r 存在使 $x<r<y$.

證 i) 設 $x \leq 0$. 由於 $y-x>0$, 由上定理得必有 $n \in \mathbb{N}$ 使 $n(y-x)>1$, 故得 $nx+1<ny$ 亦即必有 $m \in \mathbb{N}$ 使 $m-1<nx<m$ 由此得 $nx<m<ny$. 在除以 n 即得證本定理.
ii) 設 $x>0$. 仿上進行即可.

2.5 實數之接近法: 絕對值不等式及其解法

微積分是談論近似的數學. 談的主要是數之間的近似及函數間的近似. 讀者在高中時就知道它們相等的定義了, 至於近似的概念多少也有知道一些些. 在第四章裡, 我們想把這個概念做系統的介紹.(請參閱近似法的數學 p.102.) 要表達兩數之近似, 除了表示此兩數之差 (取絕對值) 須小之外, 別無他法. 問題是要小到何種地步? 換成幾何的觀點來說, 便成兩數所對應的實數線上之點的距離須很接近, 一樣的, 問題仍在如何才算接近? 如何表示兩實數之間的接近度?
實數 a 稱之爲另一個實數 x 之近似值, 精確至小數第 n 位是當 $|x-a|<1/10^n$ 時, 其中 n 爲自然數. 當然由絕對值的性質知, a 也可稱爲 x 得近似值, 就看哪個算是已知哪個算是未知而定. 如以一般習慣來說, 常以有理數做爲無理數的近似值, 很少以無理數做爲有理數的近似值.
$x \to c$ 表變數 x 趨近定數 c 之意; $x \to \infty$ 表變數 x 趨近無限大之意, 前者以不等式表示時爲 $|x-c|<\delta$, 其中 δ 表適當正數, 表實數 x 與實數 c 之距離, 當 δ 變小時, 表示 x 趨近 c. 至於後者 $x \to \infty$, 則表 $x>B$, 其中 B 表任予正數.

區間 (intervals)、鄰域 (neighborhoods)

區間是實數的特殊子集合, 是實數軸的一部分, 但中間不能缺點者, 如區間 (a,b) 表介於 a 與 $b(a<b)$ 之間的所有實數所成的集合 (注意不含 a, b), 即 $(a,b)=\{x \in \mathbb{R} : a<x<b\}$, 此種區間稱之爲開區間 (open interval). 當有含 a, b 時, 即 $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ 則以閉區間 $[a,b]$(closed interval) 表之. 秉此, 實數集合 $\mathbb{R}$ 可表成 $(-\infty,\infty)$. 這些在討論實函數 (見下一章) 時會常用到.

鄰域亦是開區間的一種,是針對某一點而言的開區間,如點c所對應的鄰域便以$N(c,\delta)=(c-\delta,c+\delta)$表之,意即由$c$附近的諸點密集組成,其中$\delta$表適當正數.鄰域實即不等式$|x-c|<\delta$之解集合.由實數之閉聯性知此解集合絕不會空集合,而且諸元素緊密地連結在一起.

實數之絕對值(Absolute Values)、距離(distance)、接近(closeness)
—含絕對值之不等式之解的幾何表示法

實數a之絕對值$|a|$在實數軸上表a與原點之距離.一般而言,$|x-y|$表兩實數x,y之距離.有此特性之故,絕對值常用來表示'接近'(closeness)的概念.茲將絕對值的定義重述如下:

$$|a|=\begin{cases} a & \text{當 } a\geq 0 \text{ 時} \\ -a & \text{當 } a<0 \text{ 時} \end{cases}$$

由上面的絕對值定義易得如下的結論:

$$\text{對任予實數 } a,\quad -|a|\leq a\leq |a|.$$

含絕對值之不等式$|x-a|<b$之解表實數軸上所對應的點x與a之距離小於b之意,而其解爲$a-b<x<a+b$,常以區間$(a-b,a+b)$表之.至於不等式$|x-a|<\delta$(其中δ爲適當正數)之解$a-\delta<x<a+\delta$就常以a爲中心之**鄰域**$(a-\delta,a+\delta)$表之,意指由a鄰近之(實數)點所組成的區間.而$0<|x-a|<\delta$之解表不含a之鄰域.鄰域在談論實函數之極限時會常被用到(詳見第四章).當δ越小時,就表示x越接近a.(因爲距離越短之故).須知只要具有長度的區間(不論長或短)或鄰域必含有無數個實數在內,即有理數及無理數均有無數多個.
要表示相等的關係不難,在數學上已常見不已,但對如何表達接近而不相等的概念卻一直付諸缺如.在微積分裡常用含絕對值記號的不等式來表示接近的狀況—-距離愈小的兩數就表示愈接近.函數的極限就是試著把接近(closeness)的概念做清楚交代的數學題材.這是要談'近似'不可或缺的概念.

例1 試證:若$\forall\varepsilon>0, |x-a|<\varepsilon$,則$x=a$.(此例之意爲:若兩實數之差的絕對值小於任予正數,則此兩數非相等不可.)

證 (採反證法)若$x-a\neq 0$,則$|x-a|>0$取$\varepsilon=|x-a|/2>0$時,由假設得$|x-a|<|x-a|/2$顯然不合.得證.
註:欲證很明顯成立的敘述,通常採反證法.

例 2 試證:若 $a, b \in \mathbb{R}$,則 $|a+b| \leqq |a|+|b|$.(此即爲三角形不等式.)

證 已知 $-|a| \leq a \leq |a|, -|b| \leq b \leq |b|$,利用次序運算律得

$$-(|a|+|b|) \leq (a+b) \leq (|a|+|b|)$$

此即得證結論.(因 $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$)

另證 i) 當 $ab = 0$ 時,即表 a, b 中有一爲 0. 則 $|a+b| = |a|+|b|$.
ii) 當 $ab > 0$,則 a, b 同正負. 故亦得 $|a+b| = |a|+|b|$; 當 $ab < 0$ 時,因 a, b 異號,故得 $|a+b| < |a|+|b|$.
iii) 由 i) 及 ii) 得證:若 $|a+b| \leqq |a|+|b|$.
註:當 a, b 表複數或向量時,上不等式更具體顯示三角形三個字的意義.

例 3 設 $|x-a| < \varepsilon$ 且 $|y-b| < \varepsilon$,試證 $|x-y| < |a-b| + 2\varepsilon$.

證

$$\begin{aligned} |x-y| &= |x-a-(y-b)+a-b| \leqq |x-a|+|y-b|+|a-b| \\ &< \varepsilon+\varepsilon+|a-b| = 2\varepsilon+|a-b|. \end{aligned}$$

註:怎知證明中須加減 a, b 呢?從欲證的結論配出所予之假設型是得證之關鍵所在.

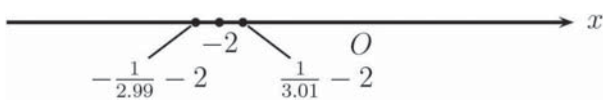
例 4 若 $-2 < x < 1$,試證 $|x^2+x| < 6$.

證 由假設得 $|x| < 2$. 故由三角形不等式得

$$|x^2+x| \leq |x^2|+|x| < 4+2 = 6.$$

得證.

例 4 試解不等式並以區間圖示該解: $2.99 < \frac{1}{x+2} < 3.01$.
解 所予不等式相當於 $\frac{1}{2.99} > x+2 > \frac{1}{3.01}$ 亦即 $\frac{1}{2.99}-2 < x < \frac{1}{3.01}-2$. 可見所予不等式之解爲開區間 $(\frac{1}{2.99}-2, \frac{1}{3.01}-2)$. 如下圖所示.



2.6 無理數 (Irrational Numbers) 眞的無理嗎?

讀者對無理數多少有所認識,在此只是再系統地介紹一下而已.無理數是無窮非循環小數之實數,可以補滿實數線上述有理數所遺下的'缺'點.大家都知道$\sqrt{2}$是無理數(見第一章p.11),但須知的是$\sqrt{2}$只是一個符號而已,它代表2的正平方根.真正要用它時,只能以1.41421等近似值來代替.它如圓周率π也一樣,更是一個符號而已,是希臘字母之一,只是常用了,反而習而不查.
無理數定義爲不是有理數之實數,而有理數定義爲兩整數之比(ratio).由此知,無理數爲無法以兩整數取比來表示者.能以兩整數之比表示者必定能表成有限小數或無限循環小數.是以,無理數只可表成無限非循環小數.問題是無限非循環小數到底是何許'人物'?它存在嗎?總之,無理數不是不講理之數,只因它不能以有'規則'的小數表示而已.

無理數之存在及表示法

微積分是專門探討無窮的概念.無窮的概念要靠數列的收斂來建立.由前知無理數可用無限非循環小數表示.須知無限非循環小數就屬無窮的項之數,所以要靠數列的收斂來探討它的存在性.可以這麼說,爲了認識無理數,數列的理論才應運而生.
如$\sqrt{2}$就看成數列$\{1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \cdots\}$(即每次增一位小數之有限小數,惟其平方恆小於2)的極限,意即數列$\{x_n | x_n < x_{n+1}, {x_n}^2 < 2, \forall n \in \mathbb{N}\}$會收斂之實例.(由實數之完備性知之.)
由此例可看出無理數是有限小數所成數列的極限,因此無限非循環小數可用來表示無理數之存在.另外,有理數列若收斂未必以有理數爲極限値,因有理數系不具完備性之故.如上例,有限小數是有理數,所組成的數列收斂到無理數$\sqrt{2}$.須知就是由於無理數的加入才使實數系具完備性的.可見無理數不是無理之數,反而可說是'成人之美'的數.
無理數的表示法由於是無窮非循環小數的關係,很難以有限小數直接表示,大都採特別記號表示,如上示之$\sqrt{2}, \pi$等等.
讀者在小學時便知道什麼叫無限非循環小數(non-terminal decimal).它實須借無窮級數之收斂來定義,以上所述之數列實即無窮級數取部分和而得者.(爲本書內容編排上的關係,有關數列的收斂請參閱第四章末;有關級數之收斂請參閱第六章末.)

正無理數之表示法

設a_0爲非負整數,而$a_1, a_2, \cdots$爲介於0到9之數字,則無理數可表成無窮小數$a_0.a_1a_2\cdots$之型.至於負的無理數則只須在前加上負號即可.

例 1 試將 $\sqrt{2}$ 表成無窮級數之和.

解 已知 $\sqrt{2}$ 爲無理數. 又由實際開方可得它等於 $1.41421\cdots$. 故

$$\sqrt{2} \triangleq 1+\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\cdots.$$

註: 由此例知無窮非循環小數之小數點部分可用以 10 之負乘冪所成之級數作一般的表示 (即十進位制):

$$A+\sum_{n=1}^{\infty} a_n/10^n$$

, 其中 $A \in \mathbb{Z}, a_n \in \{0,1,2,\cdots,9\}$.

例 2 設 a, b 爲兩正整數. 試證 $\sqrt{2}$ 永落在兩分數 (有理數) a/b 與 $(a+2b)/(a+b)$ 之間. 並問兩分數何者比較接近 $\sqrt{2}$?

解 已知 $\sqrt{2}$ 爲無理數之下, 兩有理數 $a/b, (a+2b)/(a+b)$ 不可能等於 $\sqrt{2}$. 今考慮

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}-a/b)(\sqrt{2}-((a+2b)/(a+b))) &= (\frac{(\sqrt{2}b-a)}{b})(\frac{\sqrt{2}(a+b)-(a+2b)}{a+b}) \\ &= \frac{(\sqrt{2}b-a)^2(1-\sqrt{2})}{b(a+b)}<0 \quad (\text{分母恆正})\end{aligned}$$

由上面演算的過程可得知 $(a+2b)/(a+b)$ 比較靠近 $\sqrt{2}$(分母比較大.)

註: 利用本例亦可找到逼近無理數 $\sqrt{2}$ 之有理數列 $\{a/b, (a+2b)/(a+b), ((a+2b)+2(a+b))/((a+2b)+(a+b)), \cdots,\}$ 其中 a, b 可爲任予正實數. 依此迭代下去. 本此例可知相當於給了數列 $\{z_n=\frac{x_n}{y_n}: \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=\frac{x_n+2y_n}{x_n+y_n}, n \in \mathbb{N}\}$. 右側分子分母先除 y_n 再取極限即可得 $l=\frac{l+2}{l+1}$ 整理之, 可得 $l=\sqrt{2}$.

例 3 若 a, b 爲有理數且 $a+b\sqrt{2}=0$, 試證 $a=b=0$.

解 已知 $\sqrt{2}$ 爲無理數之下, 若 $b \neq 0$, 則由假設 $a+b\sqrt{2}$ 得 $\sqrt{2}=a/b$, 顯然不合理 (因 a/b 爲有理數.) 故 $b=0$. 將 $b=0$ 代回原設可得 $a=0$. 證畢.
註; 從此例易知, 不等於零的有理數與無理數之相加與相乘必爲無理數. 但無理數與無理數之相加與相乘則未必是無理數.($\pm\sqrt{2}$ 便是一例.)

例 4 試化簡式: $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ 所表之數.

解須知$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}+\cdots}}$只是一個式子,其值未明,有待確定.令$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$,則$x=\sqrt{2+x}$平方之,解得$x=2(\because x>0)$.
註:讀者也許會認爲上面的解法簡單易懂,其實不然.有許多地方值得質疑之處,如一開始怎可令$x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$呢?這是典型的'偷吃步',你怎麼會知道所予'數'是一個有意義的數?記住一個數中若含有$\cdots$時,就表示它是一種偷懶的表示法,嚴格講是不正確的表示法.正確的表示法應爲

$$令x_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}\cdots}(共\,n\,個根號).$$

如此則有可得遞迴式:$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$.由於此數列既有上界又遞增(請見練習題第xx),故必收斂.所以在取極限後,才得$x=\sqrt{2+x}$.最後的結果才算得到.

無理數之運算

實際要算無理數時,都取若干位小數來計算,到底要取幾位須視實際情況而定.至於無理數的運算就秉如有理數的運算處理即可.其理由爲由於每一無理數均可視爲有理數列的極限,且因

$$\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$$

之故.上式中左側的加號可視爲無理數的相加,右側的加號則可視爲有理數的相加.至於其他運算如減法乘法及除法等,均可同理得知(參考第四章之'實數列之收斂'一節),都跟有理數的運算沒有兩樣.不過,須知的,全體無理數所組成的集合對其運算無法構成數系(因無理數集合對加法及乘法不具封閉性,意即任兩無理數之和與積,未必仍爲無理數(如$2-\sqrt{3}$與$2+\sqrt{3}$均爲無理數,但和與積都不是無理數.))

如何求無理數之近似值

實際要算無理數時,都只能取若干位小數做其近似值來代替.問題是這若干位小數如何得到的?
欲求無理數之實值,亦即無窮非循環小數表示,這裡介紹兩種簡單方法做參考.它們都依據所謂的迭代法(Method of Iterations)—迭次近似法(Method of Successive Approximations)所得的數列來取得該無理數的近似值.這些都涉及求對應方程式之實根解.
數列的收斂爲何重要?在求方程式之解時,除非其解可用根的公式求得,否則就得靠進似法來逼近,這就需要數列的收斂來達成.

(1) 二等分法 (bisection Method)

例 1 求無理數 $\sqrt[3]{2}$ 的四位小數近似值.

解 首先判斷 $\sqrt[3]{2}$ 落在那兩個整數之間, 得 1, 2. 其次, 取 1, 2 之二等分點 3/2, 因 $(3/2)^3 > 2$, 故下次取 1 與 3/2 之二等分點 $(1+3/2)/2 = 7/4$. 如此迭代下去, 可得數列 $\{1, 1.5, 1.75, \cdots\}$. 只要此所得數列看到第幾項後其第四位小數不再變動爲止.
另外, 亦可視爲求方程式 $x^3 = 2$ 之實根. 利用堪根定理的原理 (詳見第四章中間値定理) 以二等分法進行. 再依靠迭代法找到所要的精確小數位數.

例 2 求超越數 $\sin 31^o$ 的四位小數近似值.
解 此處須用到 $\sin x$ 的 Taylor 級數表示, 求得 $\sin 31^o$ 之近似值. 餘請參考 p.231 例 2.

(2) 定點演算法 (Fixed-Point Algorithm)

是求無理數之近似值的另一方法. 將所予無理數改成某對應方程式之解, 再利用勘根法的原理進行即得. (參考下例.)

例 求方程式 $x = 2\cos x$ 之解. (此解必是超越數嗎?)

解 首先將所予方程式 $x = 2\cos x$ 改成 $x_{n+1} = 2\cos x_n$. 然後取適當的值做爲 x_1 之値開始進行迭代下去.

n	x_n	n	x_n
1	1	6	1.4394614
2	1.0806046	7	0.2619155
3	0.9415902	8	1.9317916
4	1.1770062	9	-0.7064109
5	0.7673820	10	1.5213931

註 1: 除非特例, 此解必是超越數. (可利用反證法證得.)
註 2: 所謂定點是指所予方程式的根. 何謂演算法 (Algorithm)? 所謂演算法是指確切告知一系列的法則, 經有限步驟後可由已予資訊得出所予得之資訊者. 這是用電腦計算常採行的方法.
註 3: 由上解知, 看不出所予方程式之解, 似乎所得數列不會收斂. 可見定點演算法失效. 推究其因乃在所取迭代式不理想. 若改爲

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 2\cos x_n}{2}$$

進行時, 可得如下表所示.

n	x_n	n	x_n	n	x_n
1	1	7	1.0298054	13	1.0298665
2	1.0403023	8	1.0298883	14	1.0298666
3	1.0261107	9	1.028588	15	1.0298665
4	1.0312046	10	1.0298693	16	1.0298666
5	1.0293881	11	1.0298655		
6	1.0300374	12	1.0298668		

由上知,所取遞迴式關係重大,宜愼選.

例 3 如何求無理數2^π之近似值?

解 利用數列$\{2^3, 2^{3.1}, 2^{3.14}, 2^{3.141}, \cdots\}$求$2^\pi$之近似值.至於$2^3 = 8, 2^{3.1} =?$,等等呢?當然讀者現在可用計算器一打就知道:

$$2^{3.1} \approx 8.57419$$

$$2^{3.14} \approx 8.81524$$

$$2^{3.141} \approx$$

$$\cdots$$

但問題是計算器是怎麼設計的?這是不是值得思考的問題?

無理數集合爲一不可數 (non-denumerable or uncountable) 之無限集合

數學上有有名的由 G. Cantor(德國數學家)所創之對角線法證明了無理數集合爲一不可數之無限集合.因其證法超出本書範圍,故從略.

2.7 相關題材

超越數 (transcendental numbers) 知多少?

無理數包括根數(不可化開的數如$\sqrt{2}, \sqrt[3]{5}$等等,)及超越數(無法由1經有限次之代數運算而得之數.)如圓周率π,、自然對數底e都是超越數之例,是大家熟悉的超越數.另外,須知如$\sin 1, \ln 2$也是.它們都須要用數列來表示,即無法以有限之小數表示之意.實用上,備有三角函數値表及對數値表以便查其近似值,不過如今因計算器(calculator)的普遍使用,這些表已很少見了.

數與式之間有何差別？

設 a, b 表一般的實數，即表未確定之實數，亦即表變數 (variables) 之意．由諸變數之間經運算所組成之結果便可稱做（代數）式．如 $a+b$ 或 $(a-b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 都叫做（代數）式，其實它們還是數．
'對任予實數 a' 與 '實變數' x 之間有何差別？沒什麼差別，由上下文決定．一定要分別時則爲：
'任予實數 a' 表實數 a 爲任何給定的實數，而 '實變數 x' 則表尚未確定的實數，可以變動的實數．

實數趨近於 0 與趨近於 ∞ 之間？

都是表趨近的狀態時，會有等級之分，亦即有快慢之分，初學者常弄不清楚，以致學習效果不良，在此有必要釐清．兩者之間互爲倒數關係—-$x \to 0$ 之反面就是 $x \to \infty$．但同樣是趨近於 0 就有快慢之別，如 $1/n$ 與 $1/n^2$, $\sqrt{1/n}$ 當 n 趨近 ∞ 時，都趨於 0, 而它們對應的級數 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 與 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 卻有收斂與發散之差別.（因一般項趨近於 0 有快慢之差異．）請讀者隨時多多留意其中道理．

實數之有限 (finite) 與有界 (bounded) 之間、無限 (infinite) 與無界 (unbounded) 之間

實數之有界必有限；有限未必有界．只要是實數必有限，像 $\pm\infty$ 便是無限．有時實數 x 常表成 $x < \infty$．可見，一個數是實數時未必有界．但有界時必有限．集合亦分有限及無限．須知有限集合是指集合中只有有限多個元素之意．無限集合就是不是有限之意．實數之子集若爲有界又爲無限時，讀者試著想想看是會怎麼一回事？在有界的範圍內要放進無限多個實數會有什麼事情發生？是不是其中有些數好像黏在一起，很難說出最接近的實數的實數來？須知這也是實數之重要性質之一—-如實數之完備性的主要觀念（請見下節）就是從這裡啓發的．
讀者應認清的是，每一個實數都是有限的，但實數卻有無限多個．

例　如集合 $\{2 + (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ 爲實數之非空有界子集，且其中包含著無限多個實數，大都徘徊在 2 之左右（幾乎黏在一起）.

有限項 (finite terms) 與無窮項 (infinite terms) 之間

微積分是討論當項數無窮時，實數之各種運算律是否仍成立的問題．意即各種運算律在有限項時會成立，到了無窮多項時是亦成立呢?!

須知處理無窮項的運算的問題時,都須先處理有限項,然後再透過極限來達到無窮多項的情況.所以首先須認識數的極限,亦即由一堆實數排成一序列時,這些數會不會趨近于定數?若會的話,這個定數就叫做這些數的極限(值).

為什麼要談論無窮的問題呢?主要是有很多事象,如曲線所衍生的諸問題,只靠有限多項無法處理好,非靠無窮的概念處理不可.讀者都知道曲線可視為由無數個直線段組成,而直線段相對來說要比曲線段易於處理多,是不?

另外,如無理數,並非不講理之數,只是它無法以有限小數或無限循環小數表示而已.若沒有無窮的概念來處理恐就無法認清什麼是無理數.須知沒有無理數的加入,就很難探討有關實數的相關問題.不過,透過極限,無理數可以藉有理數逼近之.所以有理數還是不能忽視.

存在與唯一的問題

數學上的重要定理大都是存在的問題,是不是這樣?請讀者閉目想一下.存在的證明推來推去都歸結到實數的完備性.這是之所以為何完備性重要的主因.至於唯一的問題就比較簡單多了.很自然的,存在的問題解決了(比較難的部分),便問是否唯一的問題.記注,存在未必唯一.若能存在又唯一,那就算是很特殊了.

2.8 練習題

1. 假定x與y為實數.問下列敘述何者為真?
a)對每一$x, x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$
b)對每一$x, x > 0 \Leftrightarrow x^2 > 0$
c)對每一$x, x^2 > x$
d)對每一x,有一y存在使$y > x^2$.
e)對每一正數y,有另一正數x存在使$0 < x < y$.
f)若$a < b$,則$a^2 < b^2$.

2. 假設a具有如下之性質:
對每一自然數n, $a \leqslant 1/n$.試證$a \leqslant 0$.

3. 下列敘述中何者為真?除非另外提及,假定x, y與ε都是實數.
a)對每一$x, x < x + 1$.
b)有一自然數N存在使所有的質數都小於N
c)對每一$x > 0$,存在一y使$y > 1/x$.
d)對每一正數x,必有一自然數n使$1/n < x$.

e) 對每一正數 ε, 有自然數 n 使 $1/2^n < \varepsilon$.

4. 若 a, b, c 爲有理數, 且 $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 0$ 試證 $a = b = c = 0$.(提示:利用上章習題第1題.)

5. 若 a, b, c, d 爲有理數, 且 $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$, 試證 $a = c$ 且 $b = d$.

6. 試證 $3 - \sqrt{2}$ 爲無理數.

7 .a) 問直線 $y = \sqrt{3}x + 5$ 上有多少個有理點? (所謂有理點是指該點的座標均爲有理數者.)
b) 任予一直線, 其上之有理點之個數只有三類 $\{0, 1, \infty\}$.

8. 令 a, b 爲實數, 並滿足 $|a - b| \leqq 1$. 試證 $|a| \leqq |b| + 1$.

9. 令 a, b, c, d 爲實數, 且 $|c| \neq |d|$. 試證

$$|\frac{a+b}{c+d}| \leqq \frac{|a| + |b|}{||c| - |d||}.$$

10. 試求不等式 $|x - 3| + |2x + 1| < 11$ 之解所對應的區間.

11. 設 a, b 爲兩正整數. 試證 $\sqrt{3}$ 永落在兩分數 a/b 與 $(a + 3b)/(a + b)$ 之間. 問哪一個比較接近 $\sqrt{3}$?

12. 若 a, b, c, d 爲有理數, 而 x 爲無理數, 試證 $(ax + b)/(cx + d)$ 通常表一無理數. 問何時例外?

13. a) 試證 $|x| \leq 1 \Rightarrow |x^2 - 1| \leq 2|x - 1|$.
b) 試證 $-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow |x^2 + x - 2| \leq 4|x - 1|$.
c) 試證 $|x| \leq 1 \Rightarrow |x^2 - x - 2| \leq 3|x + 1|$.
d) 試證 $|x - 1| < 1 \Rightarrow |x^3 + x - 2| < 8|x - 1|$.

14. 利用三角形不等式及 $0 < |a| < |b| \Rightarrow 1/|b| < 1/|a|$, 試證
a) $|\frac{x-2}{x^2+9}| \leqq \frac{|x|+2}{9}$
b) $|x| \leqq 2 \Rightarrow |\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}| \leqq 15$.
c) $|x| \leqq 1 \Rightarrow |x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}| < 2$

15. 試求δ(跟ε有關)使下列蘊涵關係成立.
a) $|x-5|<\delta \Rightarrow |3x-15|<\varepsilon$
b) $|x-2|<\delta \Rightarrow |3x-6|<\varepsilon$
c) $|x-5|<\delta \Rightarrow |x^2-2x-15|<\varepsilon$
d) $|x-2|<\delta \Rightarrow |x^3-2x^2+x-2|<\varepsilon$

16. 若數列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$定義成$x_{n+1}=\sqrt{x_n+2}, x_1=\sqrt{2}$,利用實數完備性證明其收斂.

17. 試求$\sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{3+\cdots}}}$之確值.

18. 求

$$1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}$$

之確值.

19. 求$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}$之確值.

20. 試證下列敘述成立.
a) 若$t>0$,則有自然數n_t使$0<\frac{1}{n_t}<t$.
b) 若$y>0$,則有自然數n_y使$n_y-1\le y<n_y$.

21. 試證下列敘述成立.
a) 若$x,y\in\mathbb{R}$且$x<y$,則有無理數z使$x<z<y$.
b) 若$y>0$,則有自然數n使$\frac{1}{2^n}<y$.

22. 試證:有一正實數u使$u^3=2$.

第二章習題解答

1. a) 真.
b) 假.反例,如$x<0$.
c) 假.反例,如$x=1/2$則顯$x^2\not>x$
d) 真.令$y=x^2+1$即知恆成立.
e) 真.令$x=y/2$則顯然恆有$0<x<y$.
f) 假.如$a=-3,b=1$則顯然$a<b$但$a^2>b^2$.

2. (反證法)若 $a > 0$,則必有一自然數 n 使 $na > 1$(正數的倍數會一直變大).此即 $a > 1/n$ 與所設不合.

3. a)真.
b)假.質數有無限多個.
c)真.(理由同上第2題)
d)真.(理由同上第2題)
e)真.(理由同上第2題)

4.關鍵在兩無理數 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 當乘以有理數後再相加會產生有理數否. $b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = -a$,兩邊平方之,得 $2b^2 + 3c^2 + 2bc\sqrt{6} = a^2$.已知 $\sqrt{6}$ 是無理數,可見非 $bc = 0$ 不可.若 $b = 0$ 而 $c \neq 0$,則由原假設知 $a + c\sqrt{3} = 0$.此顯然不行($\sqrt{3}$ 是無理數),故亦非 $c = 0$ 不可.同理,若 $c = 0$,亦得非 $b = 0$ 不可.由此亦得 $a = 0$.

5.由假設得 $a - c = (d - b)\sqrt{2}$,因 $\sqrt{2}$ 是無理數,故非 $d - b = 0$ 不可.自然 $a - c = 0$.得證.

6.設 $3 - \sqrt{2}$ 爲有理數 r,則由移項得 $3 - r = \sqrt{2}$.此等式顯然不合(左側爲有理數而右側爲無理數).

7. a)只有一個有理點,爲(0,5).(因只要 $x \neq 0$, y 一定是無理數之故.)
b)因若有兩點是有理點,則過此兩點之直線就有無數個有理點,又如 $y = x + \sqrt{3}$ 之直線就沒有有理點.

8.由三角形不等式得 $|a| - |b| \leq |a + b| < 1$.再移項即得證所欲結果.

9.由三角形不等式得 $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$.同理,$||c| - |d|| \leq |c + d| \leq |c| + |d|$ 利用實數次序性得 $|\frac{a+b}{c+d}| \leq \frac{|a|+|b|}{|c|-|d|}$.證畢.

10. $[3, 13/3)$ 或 $(-3, -1/2]$.

11. $(\sqrt{3} - \frac{a}{b})(\sqrt{3} - \frac{a+3b}{a+b}) = \frac{(\sqrt{3}b-a)^2(1-\sqrt{3})}{b(a+b)} < 0$.
$\frac{a+3b}{a+b}$ 比較靠近 $\sqrt{3}$(因 $|\sqrt{3} - \frac{a+3b}{a+b}| = |\frac{(\sqrt{3}b-a)(1-\sqrt{3})}{(a+b)}| < \frac{\sqrt{3}b-a}{b}$)
12.設 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 爲有理數,爲 r 時,則 $ax + b = r(cx + d)$ 即 $(a - rc)x + b - dr = 0$.此即表非 $a - rc = 0$ 不可,(因 x 爲無數數)如此又得 $b - dr = 0$.故 $\frac{ax+b}{cx+d}$ 表有理數指當 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 時.
例外: $a = c = 0$ 或 $a : c = b : d$ 時.

13. a) $|x^2-1| = |x+1||x-1| \le (|x|+1)|x-1| \le 2|x-1|$.
b) $|x^2+x+2| = |x+2||x-1| \le (|x|+2)|x-1| \le 4|x-1|$.
c) $|x^2-x-2| = |x-2||x+1| \le (|x|+2)|x+1| \le 3|x+1|$.
d)$|x^3+x-2| = |(x^3-1)+(x-1)| = |x-1||x^2+x+2| \le |x-1|(|x|^2+|x|+2) \le 8|x-1|$
(因$|x-1|<1 \Rightarrow 0<x<2$.)

14. a)$|\frac{x-2}{x^2+9}| \le \frac{|x|+2}{9}$其中分子$|x-2| \le (|x|+2)$;分母$|x^2+9| \le 9$.
b) $|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}| \le (|x^2|+|2x|+7)/1 \le 15$(因$|x| \le 2$.)
c) $|x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}| \le |x^4|+|\frac{1}{2}x^3|+|\frac{1}{4}x^2|+|\frac{1}{8}x|+|\frac{1}{16}|$
$\le (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}<2)$(因$|x| \le 1$.)

15. a) $|3x-15| = 3|x-5| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-5| < \varepsilon/3$可見$\delta = \varepsilon/3$.
b)仿上得$\delta = \varepsilon/2$.
c) $|x^2-2x-15| = |x-5||x+3| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-5| < \varepsilon/|x+3|$取$\delta = min\{1, \varepsilon/9\}$
(因$|x-5|<1 \Leftrightarrow 4<x<6$),則顯然$|x^2-2x-15| = |x-5||x+3| < (\varepsilon/9)|x+3|$
$< (\varepsilon/9)\cdot 9 = \varepsilon$
d) $|x^3-2x^2+x-2| = |x-2||x^2+1|$取$\delta = min\{1, \varepsilon/10\}$(小者)
(因$|x-2|<1 \Leftrightarrow 1<x<3$),則顯然$|x^3-2x^2+x-2| = |x-2||x^2+1| < (\varepsilon/10)|x^2+1|$
$< (\varepsilon/10)\cdot 10 = \varepsilon$

16. i)數列$\{x_n\}$有上界:$x_n < 2$(因$x_n - 2 = \sqrt{x_{n-1}+2} - 2 = \frac{x_{n-1}+2-4}{\sqrt{x_n+2}+2} = \frac{x_{n-1}+2-4}{\sqrt{x_{n-1}+2}+2}$
$= \frac{x_{n-1}-2}{\text{正}} = \cdots = \frac{x_1-\sqrt{2}}{\text{正}} < 0$)
ii)數列$\{x_n\}$爲遞增:$x_n < x_{n+1}$(因$x_{n+1}-x_n = \sqrt{x_n+2} - \sqrt{x_{n-1}+2} = \frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{x_n+2}+\sqrt{x_{n-1}+2}}$
$= \cdots = \frac{x_2-x_1}{\text{正}} > 0$)
由上i)及ii)得數列$\{x_n\}$收斂

17.同上題並參考p.40之例4,欲求之確值爲3.

18.所予式相當於$x_{n+1} = 1+\frac{1}{x_n}$,仿上上題可得確值爲$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

19. $=2$

20. a)由阿基米德性得必有一自然數n使$nt>1$.令$n_t = n$即得.
b)由阿基米德性得必有一自然數n使$\{n \in \mathbb{N} : n \cdot 1 > y\} \neq \emptyset$.令$n_y$其最小元素,即可得證.

21. a) 由稠密性,考慮兩實數 $x/\sqrt{2}, y/\sqrt{2}$ 則有一有理數 r 介於其間. 茲令 $z = r\sqrt{2}$ 即可得證.
b) 考慮實數 $\ln_2 y$,則必有自然數 n 使 $\ln_2 y + n > 0$,去對數後即可得證.

22. 略.(請仿照 p.35 例 4 進行.)