

第一章

須備知識——‘飯前酒’(Appetizer)

內容

1-0 緣由

1.1 微積分學習法要訣

1.2 集合代數

1.3 數學內容的骨架

1-4 簡易邏輯

1.5 高中數學有哪些概念在微積分中常用到

1.6 微積分學的原意何在？

1.7 練習題

1.1 緣由

請問你是位‘老’球迷嗎？

請問你是球迷嗎？你常看NBA或MLB(美國職棒)嗎？又怎麼才算是一位‘老’的球迷？首先要聲明的是，‘老’跟年齡無關，是老練的老。要當‘老’的球迷，顯然的，你是不是要熟悉球賽的一些規則？球賽中發生狀況時，你多少能夠曉得其中來龍去脈。當你能掌握球賽的節奏時，自然對球賽就會發生興趣，慢慢地，才會執迷其中，能這樣才算好球迷，你說是不？請問假若你是‘老’球迷時，當球賽進行一段時間後，你能看出哪一隊會贏嗎？又你能講出其中的原委嗎？

須知學好數學也如出一轍——花點時間，熟悉各種規則，並領會其中相關道理。慢慢地就能執迷其中了。

1.2 微積分學習要訣

首先恭賀你成爲新鮮人(freshman)了.在你轉大人的那一刻,你是否想到自己要有所一改過去的種種習慣或想法?

你不能還一味地依靠著父母來面對未來社會的變遷.你是不是要開始學習自己獨立面對社會上的各種挑戰.在做爲新鮮人的情境裡,你要面對的是養成獨立學習所需修的科目,尤其是微積分.

微積分對新鮮人來說並非是嶄新的數學科目.這裡想告訴你的是如何獨立學習微積分.試著找一本微積分的教科書自己唸唸看.開始時,一定困難重重,一定看不太懂,尤其是用原文書,恐更難掌握.但在此告訴你這是極其希鬆平常的事,你不用灰心或失去信心.你不能像看小說或故事書那樣,只是想過目其中情節而已,你得多唸幾回(其實假如你想成爲起碼的小說家,多看幾回也是逃不掉的.)譬如觀賞美式足球賽(NFL),個人在美國留學時,剛開始也看不懂其遊戲規則,由於每逢週末都有比賽,多看幾遍後,就發生興趣.唸數學書屬於比較須要花心思的一種,所謂的花心思,其實就是要多唸幾回的意思.把看不太懂的地方做記號或記下來,隨時隨地再想一下或查證一下.幾回下來(一回生,二回熟)不太懂的地方就會慢慢看出其端倪,也就懂得其中的原委了.反正,唸數學書不能像看小說一般,在在需要慢工出細活,多看幾回,一定會有所頓悟.

總之,耐心的想,恆心的唸,沒有什麼題材無法瞭解的.

有了自己唸與想的親身歷練後,就會感觸很深,也就會發生興趣.因爲這是自己體驗出來的,很難在你以後的日子裡淡忘.

怎樣解題以及如何證題?

對初學微積分的讀者來說,最困擾的恐是‘怎樣解題以及如何證題’了.在此只能奉告讀者沒有什麼捷徑可尋,只有勤做題目,致而從中悟出概念之通達所在.只要熟練各種概念,如何解題、如何證題都可迎刃而解.這不是虛應讀者的回話,實是編者的誠懇肺腑之言.

本書提供各類題目,並有獨到的解法及證法供參考(請參見本書中所提供的例題、習題以及定理證明要訣(p.14)).不過要提醒讀者的是數學上的題目千千萬,永遠解不完.千萬不要爲解不完而灰心或喪志,只要掌握原理原則,再假以時間,事情就不會那般無助.須知失敗的經驗,也是值得珍惜的.能夠記取失敗的經驗,才能縮短到達成功的彼岸,過來人都知道這番道理.

1.3 集合代數

集合的概念是數學的基礎,這是大家公認的.集合間的運算及它們的性質構成集合代數(algebra of sets),如下示:

集合之間有聯集(union)、交集(intersection)、補集(compliment)等運算,分別以 $\cup, \cap, ^c$ 表之,它們的定義分別給成:

設 A, B 為兩集合,則

$$A \cup B \triangleq \{x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

$$A \cap B \triangleq \{x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

$$A^c \triangleq \{x : x \notin A, x \in U(\text{字集})\}$$

聯集交集及補集等運算具有如下性質便形成所謂的集合代數.聯集交集及補集亦常常分別以'或'(or)'且'(and)及'非'(not)稱呼之.

設 $A, B, C \in U$ (字集:包含所有集合的集合)

$$\text{封閉性(property of closure)} \quad A \cup B \in U, A \cap B \in U, A^c \in U$$

$$\text{交換律(commutative law)} \quad A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

$$\begin{aligned} \text{結合律(associative law)} \quad (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{分配律(distributive law)} \quad A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{de Morgan 律} \quad (A \cup B)^c &= A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c \\ (A^c)^c &= A \end{aligned}$$

以上諸性質均常常被用到,故而習而不察,以為當然成立而被忽略.以上諸性質亦均可推廣到無限多個(屬不可數的)集合.

另外,集合之間有一種關係叫包含關係(inclusion),以 \subset 表之.

$$A \subset B \triangleq \forall x \in A, x \in B \triangleq \text{命題「若 } A, \text{ 則 } B\text{」成立.}$$

此時亦稱集合 A 為集合 B 之子集(subset).包含關係具有下列性質:

$$\text{推移性(transitive law)} \quad A \subset B, \text{ 且 } B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

相等性 (equality) $A = B \Leftrightarrow A \subset B, \text{ and } B \subset A$

註：本來集合的相等與否可由它們是否含有相同的元素而定，但集合可能含有無限多個元素，故要看出元素是否相同恐有困難，況且集合的給予未必一一列出其元素，所以上列之相等性還是比較實用。（請參見 p.14 有關 De Morgan rule 之證明。）

有限集合與無限集合 (finite and infinite sets)

有限集合就是集合有有限個元素；而無限集合就是集合有無限個元素，不過，無限個元素中分可數 (denumerable) 與不可數 (non-denumerable) 兩種：可與自然數集合成一對一者為可數的無限集合，否則為不可數的無限集合。

無限集合不管是可數還是不可數，均具有此特性：本身與其真子集可建立一對一對應，這是有限集合無法具備的。

例 實數集合就是不可數的無限集合，而有理數集合卻是可數的無限集合。（理由請見第二章 p.42.）

1.4 數學內容進程的骨架

數學教科書內容描述的模式大致是由定義 (definitions) 定理 (theorems) 以及定理的證明 (proof) 做骨架構成，微積分學當然也不例外。在定義與定理之間大都插進一些例子，以助瞭解定義的含意。另外，定理證明完之後也都會有一些應用到定理性質的例題，一樣是為測試是否了解該定理而引進的。

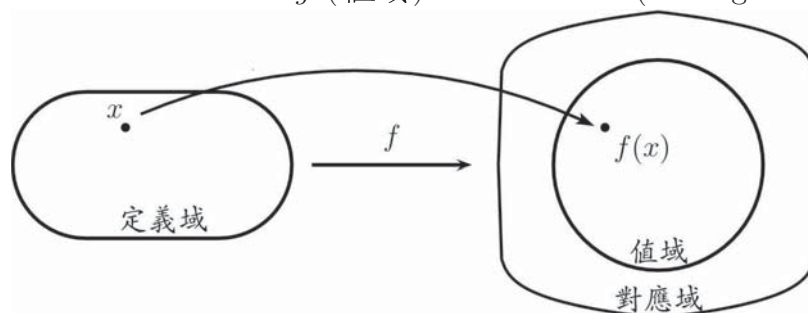
定義是為引進新術語而設的，新術語的含義有待界定，應是很自然的。有了新術語來敘述定理的內容，就能使定理的敘述簡潔扼要。至於定理，則是將欲談的內容的主要性質呈現出來。須知只有重要的性質才以定理呈現，意即很有用的性質才夠得上稱之為定理。定理在數學上須要加以證明才能被接受，所以定理的證明是數學的‘主菜’，不可或缺。定義與定理大都以命題“若—，則—”(IF—, THEN—) 之型式呈現。

定義雖都以命題「若—，則—」型式出現，其意卻應為「若且唯若 (if and only if)—，則 (then)—。」其因可能為了簡潔或習慣起見。這是讀者須留意的地方。

實例 (以英文呈現) — 以逆函數為例

Definition of a FUNCTION

A *function* (函數) f is a rule of correspondence that associates with each object x in one set, called the *domain* (定義域), a single value $f(x)$ from a second set. The set of all values so obtained is called the *range* (值域) of the function. (See Figure .)



意即, 函數為一種對應法則, 它把一集合的每一元素 x 附屬予第二集合之單一值 $f(x)$. 其中的第一集合就叫做此函數的定義域, 第二集合叫做對應域 (Co-domain), 其中被函數對應到的值所成的集合便叫做值域. (注意, 值域未必就是第二集合.) 爾後, f 之定義域就以 $dom f$ 表之.

Definition of an INVERSE FUNCTION

Let f be a function defined as above. If there exists a function g such that

$$f(g(x)) = x, \quad \forall x \in \text{dom} g \quad \text{and} \quad g(f(x)) = x \quad \forall x \in \text{dom} f,$$

then the function g is called *inverse function* (逆函數) of the function f .

首先要注意的是, 逆函數是對於函數的合成運算取的, 不是對乘法取的, 意即逆函數不是倒函數. 另外, 須注意的是, 不是每一函數都有逆函數. 這是下面定理的主意.

Theorem A function f has an inverse function if and only if it is a one-to-one function on its domain.

(意即: 一函數有逆函數之充要條件是它在其定義域上為一對一函數).

因涉及一對一函數, 故須知其定義:

Definition of ONE-TO-ONE FUNCTION

意即: 函數為一對一的定義是定義域中不同的元素在此函數之對應下必對應到不同的值.

定理的證明 略。(請參照下欄定理證明要訣例4).

一函數若有逆函數,則稱此函數為可逆函數(invertible function).讀者須知的是,一函數若有逆函數,則此逆函數唯一存在且必以原函數的值域為定義域,而以原函數之定義域為值域.

例 下列所予函數中,都以 \mathbb{R} (實數集合)為定義域,指出何者為可逆函數?

a) $f(x) = 3x - 100$

b) $f(x) = x^2$

c) $f(x) = x^3 + 10$

d) $f(x) = |x|$

e) $f(x) = \sin x$

解 查驗看看所予函數是否為一對一函數而得解.答案為:a)及c).

1.5 簡易邏輯

命題成立與否之判定

儘管定義、定理都以命題之型式呈現,但不是所有的命題都會成立,其因是命題可由各種的敘述做為其假設部及結論部組成.可見如何判定命題之成立與否至關重要.

由集合之間的包含關係知 $A \subset B$ 相當於(同義於(equivalent))命題「若P,則Q」成立(常以 $P \Rightarrow Q$ 表示),其中A,B分別表使敘述P,Q為真所對應的集合.由此可見,欲判定命題之成立與否,可歸結於對應集合的包含關係之是否持有.(參照下面例子.)

例1 試判定命題「if $x > 2$, then $x > 5$ 」是否成立?

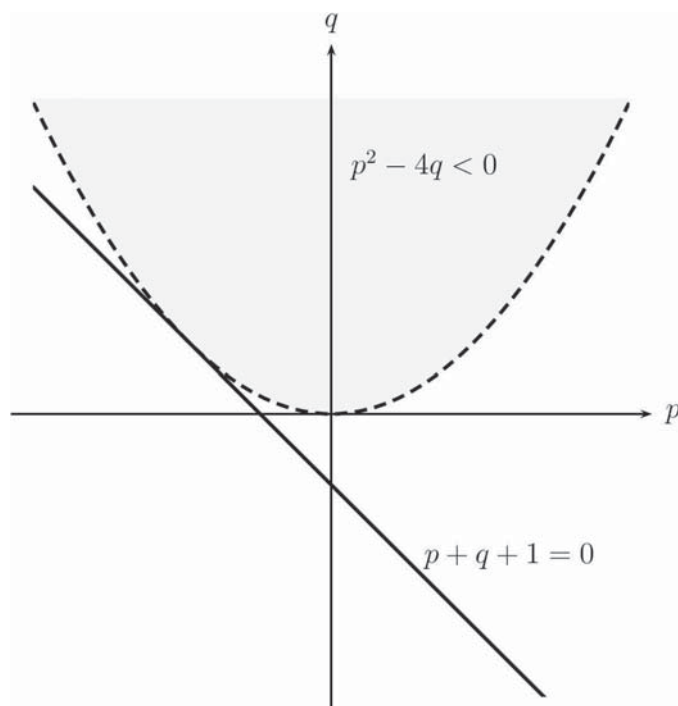
解 由於假設部所對應的集合為 $A = \{x > 2\}$,而結論部所對應的集合為 $B = \{x > 5\}$.顯然的, $A \subset B$ does'nt hold.故所予命題不成立.

註:上命題中之假設部' $x > 2$ '應為' $x > 2$ 為真'的縮寫,請讀者留意.結論部亦然.

例2 試判定命題:若二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ 有虛根,則 $p + q + 1 > 0$.是否成立?

解 二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ 有虛根相當於 $p^2 - 4q < 0$,故由集合 $\{(p, q) | p^2 - 4q < 0\}$ 與集合 $\{(p, q) | p + q + 1 > 0\}$ 之間的包含關係(見附圖)知所予命題成立.

註:本例之另一證法請參見p.12例2.



命題的種類

命題分原命題 (proposition)、逆命題 (converse) 及逆否命題 (contraposition), 其定義分別為:

設「若 P , 則 Q 」為正命題, 其中 P, Q 為敘述, 而 $\sim P, \sim Q$ 表它們的否定. 則

「若 Q , 則 P 」為其逆命題, 而「若 $\sim Q$, 則 $\sim P$ 」為其逆否命題.

須知一命題若成立, 其逆命題未必成立, 但其逆否命題必成立, (蓋 $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$, 其中 A, B 分別表敘述 P, Q 所對應的集合.) 一命題之逆否命題常用於反證法中.

例 1 試證: 若 n^2 為偶數, 其中 n 為整數, 則 n 為偶數.

證明要訣: 整數非偶數即奇數, 採直接證法, 似乎無言以對, 故採反證法.

證 若 n 不為偶數, 則 n 必為奇數, 即 $n = 2p + 1$, 其中 p 為另一整數. 平方之, 得 $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 4(p^2 + p) + 1$. 可見 n^2 不為偶數, 與原先之題設不合, 得證.

例 2 試證 $\sqrt{2}$ 是無理數.

證明要訣: 無理數的定義很簡單就是非有理數, 此亦即指有理數之否定之意. 而有理數之定義為兩整數之比, 而此兩整數可取至互質 (無公約數之意). 至此想直接證明似乎沒有什麼話好講, 故只好採反證法.

證 設 $\sqrt{2}$ 為有理數, 則由有理數之定義知, 必有兩互質的整數 m, n 使 $\sqrt{2} = m/n$. 等式兩邊平方之, 得 $2 = m^2/n^2$ 此亦即 $2n^2 = m^2$ 可見 m^2 為一偶數. 令 $m = 2p$, 其中 p 為整數, 代入前等式得 $n^2 = 2p^2$ 同前得亦為偶數, 可見與原先假設之互質不合, 因而得證.

必要與充分條件 (necessary and sufficient condition)

在命題「若 P, 則 Q」成立之下, 有時就稱敘述 P (假設部 (Assumption)) 為所予命題成立之充分條件, 而敘述 Q (結論部 (Conclusion)) 就稱為必要條件. 若所予命題之逆 (即「若 Q, 則 P」) 亦成立時, P 與 Q 便互稱為充要條件, 常以「若且唯若 P, 則 Q」合表之.

例 1 試求對所有 $x > 0$, $ax^2 + bx + c > 0$ 成立之充要條件.

解 令 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 則由題意知欲求 $f(x) > 0$ 之充要條件. 由於 $f(x)$ 為二次函數型 (當 $a \neq 0$ 時), 其圖形為拋物線. 配合 $f(x) > 0$ 可得 $a > 0$ 且 $b^2 - 4ac \leq 0$ (可由拋物線須開口向上且通過原點推得.)

另外, 若 $a = 0$ 時, $f(x) > 0$ 成立的條件為 $b \geq 0$, 且 $c > 0$. (須知 $f(x) = bx + c$ 表一直線.) 綜合以上, 所求之充要條件為 $a > 0, b^2 - 4ac \leq 0$ 或 $a = 0, b \geq 0, c > 0$.

註: 有關不等式的題目改以函數來設想常會比較清楚地抓住重點. 讀者不妨以二次函數之圖形來解本例.

例 2 試證二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ 有虛根的必要條件為 $p + q + 1 > 0$.

證由二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ 有虛根的充要條件為判別式為負, 意即 $p^2 - 4q < 0$, 將 q 用 $p^2/4$ 代入 $p + q + 1$ 得 $p + q + 1 > p + p^2/4 + 1 = \frac{(p+2)^2}{4} \geq 0$. 可見 ($p^2 - 4q < 0 \Rightarrow p + q + 1 > 0$), 故 $p + q + 1 > 0$ 得證為所予二次方程式有虛根的必要條件.

註: 依據集合間之包含關係亦可得本例之結論. 請參考 p.11 之附圖.

含有量詞之敘述的否定法

在數學上, 常常可以看到含有量詞之敘述, 如含「對所有」(for all)「至少有」(there exists) 等等的敘述. 對於這樣的敘述又如何取否定, 關係著對它的瞭解及掌握. 對敘述成立之證明更不可或缺. 這可透過 De Morgan rule 來進行, 蓋「對所有」相當於「有很多的且」(即取交集)之意, 而「至少有」相當於「有很多的或」(即取聯集)之意. 以式子表明時為

$$\sim (\forall x \in A, p(x) \text{ is true}) \Leftrightarrow (\exists x \in A \text{ such that } p(x) \text{ is false}).$$

其中 $p(x)$ 表含有變數 x 之敘述, 其真假 (True or False) 視 x 之值而定.

例 1

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \text{ such that } y > x$$

之否定為

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ such that } \forall y \in \mathbb{R}, y \not> x.$$

此外,命題也可以改成含有量詞的敘述來表達.茲舉例說明如下.

例 2 命題「若 $x > 2$, 則 $x > 5$ 」相當於含有量詞的敘述:對所有滿足 $x > 2$ 之 x 必 $x > 5$. 其否定便可比照命題的否定而得,為:至少有一滿足 $x > 2$ 的 x 使 x 不大於 5. 以符號表示時為:

$$\forall x \text{ with } x > 2, \text{ we have } x > 5$$

之否定為

$$\exists x \text{ with } x > 2 \text{ such that } x \not> 5.$$

命題的否定法—反證法須用到

數學上很多定理的證明都利用反證法.反證法是假定所予命題不成立之下進行的.所以要進行反證法時,得知道命題不成立所代表的含義,亦即命題的否定如何敘述才算正則.

由上知,命題的成立與否可由其假設部及結論部所對應的集合是否具包含關係而定.是以,命題不成立相當於對應的集合之間不具包含關係.由此可得命題的否定法,茲以式子表明如下.

$$\sim (P \Rightarrow Q) \triangleq \sim (A \subset B) \triangleq A \not\subset B \triangleq \exists x \in A \text{ such that } x \notin B$$

是以,命題「若 P , 則 Q 」的否定相當於 P 且非 Q . (即 $\sim (P \Rightarrow Q) \triangleq (P \wedge \sim Q)$, 其中 \sim 及 \wedge 分別表'非'(否定)及'且'之意.) 又 A, B 分別表對應於敘述 P, Q 之解集合.

例 令 $x, y, a \in \mathbb{R}$, 試證下列命題(成立).

a) $x < y + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow x \leq y.$

b) $x > y - \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow x \geq y.$

c) $|a| < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0 \Leftrightarrow a = 0$

證明要訣:先看結論要什麼,反想回去.若結論很明顯成立,則利用反證法.(此時應知敘述的否定法.)

證 a) (\Rightarrow) 採反證法:即

$$(x \not\leq y \Leftrightarrow \sim (x < y + \varepsilon \forall \varepsilon > 0))$$

$$\text{或}(x > y \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \ni x \geq y + \epsilon.)$$

(在此須要找一正數 ϵ_0 使 $x \geq y + \epsilon_0$.) 令 $\epsilon_0 = (x - y)/2$ 確大於 0 且 $y + \epsilon_0 = y + (x - y)/2 = (y + x)/2 \leq x$.

(\Leftarrow) 顯然成立, 蓋 $x \leq y \Rightarrow x \leq (y + \epsilon)$ ($\because \epsilon > 0$)

b) 請仿 a) 練習.

c) (\Leftarrow) 顯然成立 ($\because a = 0 \Rightarrow |a| = 0$)

(\Rightarrow) (反證法) 若 $a \neq 0$, 則 $|a| > 0$.

i) 取 $\epsilon = |a|/2$, 則顯然 $\epsilon > 0$, 且 $|a| \not\leq \epsilon$.

定理證明的要訣

不可否認的, 定理之證明常困擾著修習數學的學生. 其實, 定理的證明相當於寫一篇作文—論說文. 首先你對作文的對象要有充分的認識才能下筆成章, 是不? 定理的證明亦然. 怎樣才算達到充分的認識並無標準可言, 只能盡力為之而已. 但所謂‘熟能生巧’便是個中要訣. 不熟的‘東西’當然無法端出盤面, 更難以成為‘佳餚’. 雖然如此, 在此還是提出一些基本方法供參考.

定理的證明約略分為直接證法 (direct proof) 及間接反證法 (indirect proof) 兩種, 前者舉例說明如下, 至於後者請參見下下欄. 直接推演法雖號稱直接還是要先看看結論要什麼, 再靠反推找到比較合乎假設的性質以便倒寫而完成直接推演的方法. 如下例所示.

例 1 試敘述並證明 De Morgan rule.

敘述

$$\text{DeMorgan's rule: } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

證明要訣: 先查看結論是什麼? 要證明兩集合相等, 由集合的相等性知, 須兩集合互相包含. 所以證明就在證互相包含關係成立.

證 首證: $(A \cup B)^c \subset A^c \cap B^c$:

$$\begin{aligned} \forall x \in (A \cup B)^c &\Rightarrow x \notin (A \cup B) \\ &\Rightarrow x \notin A \text{ 且 } x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A^c \text{ 且 } x \in B^c \Rightarrow x \in A^c \cap B^c \end{aligned}$$

次證: $A^c \cap B^c \subset (A \cup B)^c$: 可仿上倒寫即可.

例 2 試敘述並證明剩餘定理 (Remainder Theorem)

敘述 設 $p(x)$ 為一多項式, 則 $p(x)$ 被 $(x - a)$ 除時, 所得之剩餘為 $p(a)$

證明要訣: 談到除時, 自然想到除法定理: $p(x) = q(x)s(x) + r(x)$, 其中 $q(x), s(x), r(x)$ 分別表示商式、除式及餘式. 須知的是, 其中的商式及餘式均唯一存在, 當 $r(x)$ 之次數小於 $s(x)$ 之次數時.

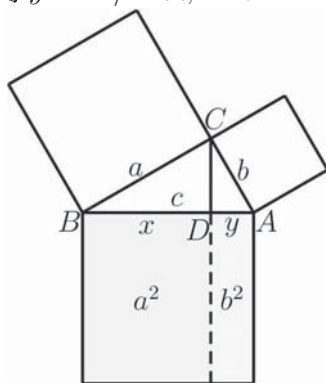
證 由題設得 $p(x) = q(x)(x - a) + R$, 其中 R 為常數 (即零次多項式). 在由多項式之相等性知, x 以 a 代入時得 $R = p(a)$. 此即得證.

例 3 試敘述並證明畢氏定理 (Pythagorean theorem).

敘述 設直角三角形的三邊長為 a, b, c (以 c 為斜邊長), 則 $a^2 + b^2 = c^2$

證明要訣: 由於所要的結論是平方型, 便想到正方形的面積, 因而從正方形想起.

證 如圖所示, 過直角頂引至對邊之垂線 CD 並延長之, 則由相似三角形 ($\triangle ABC \sim \triangle CBD$) 可得 $x = a^2/c$. 同理可得 $y = b^2/c$. $\therefore a^2 + b^2 = cx + cy = c^2$. 證畢.



例 4 一函數有逆函數之充要條件是它為一對一函數. 試證之.

證 相當於證明 (f has an inverse $\Leftrightarrow f$ is one-to-one.)

(\Rightarrow) 由假設知, 若 f 有逆函數 g , 則由逆函數之定義知

$$g(f(x)) = x, \forall x \in \text{dom } f.$$

今針對結論所須, 假定 $x_1, x_2 \in \text{dom } f$, with $x_1 \neq x_2$, 由上知即 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ $\therefore g$ is a function, $\therefore f(x_1) \neq f(x_2)$, 可見 f is a one-to-one function. 得證.

(\Leftarrow) (須找一函數 g 使 g 具 $g(f(x)) = x \forall x \in \text{dom } f$ and $f(g(x)) = x \forall x \in \text{dom } g$). $\therefore f$ 是一對一函數, 故令 g 滿足 $g(f(x)) = x \forall x \in \text{dom } f$ and $f(g(x)) = x \forall x \in \text{dom } g$, 則 g 顯然為

一函數(實亦為一對一函數,因 g 是一函數定義成:把 f 對應的值乖乖對應回去),且確為 f 之逆函數(由逆函數之定義知).

註:初學者對上述證明常有難色,理由是過去很少做過類似的證明.在此特別解說如下:

(\Rightarrow)相當於(設 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$)而在 \Rightarrow 之證明理,利用原設即 f 具逆函數來推出所要的結論: $(f(x_1) \neq f(x_2))$.

(\Leftarrow)相當於(設 f 為一對一函數(\Rightarrow) f 有逆函數).欲證明 f 有逆函數即須找一函數使其滿足逆函數之定義.

註;其他例子請參照後面的MVT之證明(第五章p.130)等等.

數學歸納法(Mathematical Induction)

欲證有關自然數的定理或命題時,大都會使用所謂的數學歸納法,這是很古老的一種證法,但還是很實用.這也是一種處理從有限到無限的證明法.

Suppose for each $n \in \mathbb{N}$ that $A(n)$ is a proposition (i.e a verbal statement or formula) which satisfies the following two properties:

i) $A(1)$ is true.

ii) For every $k \in \mathbb{N}$ for which $A(k)$ is true, $A(k+1)$ is also true.

Then $A(n)$ is true for all $n \in \mathbb{N}$.

意即,假設對各 $n \in \mathbb{N}$, $A(n)$ 為一命題(為文字上的敘述或公式)能滿足下列兩性質:

i) $A(1)$ 為真.

ii) 對每一 $k \in \mathbb{N}$, 使 $A(k)$ 為真時, $A(k+1)$ 亦為真.

則 $A(n)$ 對所有的 $n \in \mathbb{N}$ 為真.

註:顯然,數學歸納法就是在強調 $A(n) = \mathbb{N}$. 即需 $A(n) \subset \mathbb{N}$ 且 $\mathbb{N} \subset A(n)$. 但由 $A(n)$ 之定義得 $A(n) \subset \mathbb{N}$. 另由歸納法之假設i) 得知 $A(n) \neq \emptyset$, 而ii) 則表 $\mathbb{N} \subset A(n)$ 之意. 可見兩則假設不可或缺. 希讀者由此知悉數學歸納法之真意.

例 試證 Bernouli(白努力) 不等式:

$$\forall n \in \mathbb{N} (1+x)^n \geq (1+nx), \quad \text{其中 } x \geq -1.$$

證 利用數學歸納法證明如下:

令 $A(n) = \{n \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} (1+x)^n \geq (1+nx), x \geq -1, \}$ 則 i) $A(1)$ 成立, 蓋 $(1+x)^1 = 1+x \geq (1+1 \cdot x)$.

ii) 設 $A(k)$ 成立, 則

$$\begin{aligned} A(k+1) &= (1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) \\ &= 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x. \end{aligned}$$

可見 $A(k+1)$ 亦成立.

依據數學歸納法知白努力不等式成立, 得證.

註 1: Bernouli(白努力) 是瑞士人, Bernouli 不等式是建立乘冪與乘法之間的不等關係——把指數請下來變成普通相乘, 有其獨特之處.

註 2:

註 2: 請讀者想一想: 為什麼要 $x \geq -1$? 另外, 很多的證明裡, 常須把在指數位置的變數換成相乘的變數時, 就會用到白努力不等式.

不能由特例的成立就認為對應的一般性質也成立——一般人常犯的毛病

為避免這種誤解, 數學裡的一般性質都須要加以證明才能被接受. 這是數學的可貴處, 也是數學較不討好人喜歡的所在. 在數學上所舉之例子雖可助瞭解一些抽象概念, 但也常帶來一些錯誤的認知. 這是讀者須確實注意的. 譬如說, 某病人吃了某種藥痊癒了, 就說那種藥特別有效. 這是一般人常犯的毛病, 其實真正治癒的原因尚待求證, 無法驟下斷語, 是不?

註: 不過, 反過來說, 一般性質成立的證明常以其中的特例來做思考的導引.

等號知多少?

等號的兩端須都有定義, 再相等. 有時是指的是數的相等有時是指式的相等甚至是指集合或函數的相等, 不一而足. 它們都有各自的定義, 卻都以 '=' 表示. 所以讀者看到 '=' 時須認清是指哪種等號. 譬如同樣是等於 0, 是數的等於 0, 還是式的等於 0? 其意義就差很多. 其中, 若是式的等於 0 還分恆等還是方程(條件)等於 0, 再再都須加以分辨清楚. 惟須知不管是什麼樣的用法, 相等都有代換的作用.

式的相等包括兩種: 一為恆等式(identities), 另一為不是恆等式的方程式(equations). 如 $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ 表一恆等式, 為一事實以不同的記號表示, 充分展示代換的特性; 而 $x^2 + y^2 = 5$ 則表一方程式, 表變數 x, y 之間的變動不能隨意, 須受限制之意(所以方程式有時也稱條件等式). 讀者在研讀數學時, 稍注意這些, 對掌握一些重要概念會有意想不到的效果.

怎麼解方程式?——怎麼解題之範例之一——都需要反推.

解題之要領,往往在於反推,看一看結論要什麼來想起,再連結到假設.在反推的過程中隨時查看跟所予假設有否相通連結之處,致而找到了解法.茲舉一最簡單讀者都曉得之例如下.

例 試解方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$.

解 令 $x = -1$ 及 $x = 3$ 代回所予方程式得知確滿足故 $x = -1, 3$ 確為所求之解.

註:上示解法在讀者看來一定一頭霧水,怎知令 $x = -1$ 或 $x = 3$ 呢?須知這不是因所予方程式簡單之故而知之的,乃是反推而得的,就如讀者所學的方程式的解法.是先將所予方程式分解成 $(x + 1)(x - 3) = 0$ (請讀者注意,這裡是不是就有假設所予方程式成立之含意,亦即有適當之實數 x 使等式滿足),再由 $(x + 1) = 0$ 或 $(x - 3) = 0$ 而找到所要之解.有時在解的過程(如平方等)中,會引進額外的根,即所謂的增根,所以解得之根須加以驗算.

讀者須弄清楚的是解方程式的定義是什麼?不就是求方程式之根嗎?嚴格地講就是:試找 x 之值使之滿足所予方程式.至於如何找?你可以用不同的實數去嘗試或亂猜而得到所要的根.只要找到對的根,就是所要之解了.至於怎麼找到,說來就話長了.不過,話說回來,這當然不是正確解決問題的對策,不太像數學所強調的方法.實際上,解方程式就是這麼一回事,只不過是因所予方程式給的比較低次,可以透過因式分解或直接代入已知求根公式而找到其根而忘了原意罷了.

$\pm\infty$ 知多少?

過去讀者多少也碰到過無限大的情況.在微積分裡,用到它的情況會更頻繁.故在此有必要做系統的介紹.無限大有正有負,常用 $\pm\infty$ 表示.它不是數,只代表一種狀態,但在數學裡,為方便計,也賦予有數的一些運算概念,如下示:

$$0 < \infty; \quad -\infty < 0; \quad \infty + \infty = \infty; \quad \infty \cdot \infty = \infty$$

惟如此之下,亦帶來一些麻煩,須知 $\infty - \infty$ 未必等於 0; $\infty \cdot 0$ 亦未必等於 0; $\infty \div \infty$ 未必等於 1 原因是 $\pm\infty$ 只表一種狀態,其中應有快慢之分或程度上的差別,亦即它們有等級之分,惟數學上沒再分下去就是了.(詳見第五章 p.137 有關不定型的問題).

另外,如 $L = \infty$ 本無定義之等式,因為 ∞ 只表會很大的狀態,不是數.但如上所示,為方便計,也常被延用.同樣的, $\infty = \infty$ 只表兩種狀態相同之意.

1.6 高中數學有哪些主要概念用到微積分上?

高中數學裡的兩大主題:一為多項式函數(Polynomial Functions)另一為等比數列(Geometric Sequences).如何從此兩大主題加以弱化使之適用於更廣,可以說便是微

積分的重擔. 編者希望讀者對此兩主題能複習一番, 以便學習的順利進行.

等比數列是指相鄰兩項之比恆為定數之數列, 這是很特殊很簡單的數列. 讀者對它的掌握不難. 當它變成無窮時, 也不致於迷失它的去處. 在數學上, 想處理很一般的數列恐有其困難在, 但若面對稍弱化的等比數列時又怎樣?(詳見第六章) 級數呢?

無窮等比數列 \Rightarrow 無窮等比級數 \Rightarrow 函數列、函數級數 \Rightarrow 冪級數 \Rightarrow Taylor 級數 — 超越函數

多項式函數是實函數中最單純的函數, 具有很多很好的特性, 也就是說它是零'缺點'的函數. 其他的實函數便多多少少有些缺失. 它們有哪些缺失? 它們缺失之因又在哪裡? 當多項式函數變成無窮多項時, 它們又會有何不同?

多項式函數 \Rightarrow 有理函數 \Rightarrow 根函數 \Rightarrow 可解析實函數 (冪級數)

至於其他的高中數學部分, 如平面幾何, 三角學、指數對數以及有關不等式的解法等題材還是會常被用到, 只不算是核心題材就是了.

1.7 微積分學的原意何在？—本書試著把微積分學的精神具體呈現出來

Calculus 是微積分的學名, 本應譯成'算學', 只因算學與算術差一字之故, 為免混淆起見, 改以微積分稱呼之. 實際上, 算學中所算的除了函數的加減乘除等之外, 也包括函數之微分及積分新的運算), 故以微積分學代稱之, 亦可見有其灼見之處.

微積分的精神在掌握變化的先機—依憑著所建立的極限概念, 處理有關近似與無窮的問題. 微積分可簡化成兩個主題的探討:

- i) 處理有關無窮接近的問題 (即函數之極限問題)—由實數的接近到函數的接近
- ii) 處理有關無窮多項及其相加的問題 (即數列、級數之收斂問題)—也是函數極限的一種.

處理這兩大主題的數學題材, 也是微積分的主要內容, 就是下列三大算法:

- I. 求極限 (包括數列之極限及函數之極限)—近似又集團的概念:'可望不可即';
- II. 求微分—求無窮小之比值: $0/0$; 相對近似概念、 n 次 ($n = 1, 2, \dots$) 近似法 (n -th approximation method) 之原理

III. 求積分—求無窮小之無窮多項之和: $\sum 0$; 求一般函數平均值的方法(求平均值也是一種近似法的應用)

請注意, 上述之諸0均不是真零, 是趨近于零之意.

換言之, 實即在求下列四大類型之極限:

I. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ (定數)?

II. $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = l$ (定數)?

III. $\lim_{|\Delta x_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k = L$ (定數)? 當所予區間 $[a, b]$ 之分割 $\{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$ 足夠細時, 其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \rightarrow 0, x^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

IV. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k = f(x)$? 當 $|x - c| < R$ 時. 其中 $R > 0$ 為前等式左側級數之收斂半徑.

進一步說明於下:

‘可望不可即’—只能接近不能接觸的境界: 極限的世界

很多事象看起來都很像, 但就是不一樣. 換言之, 就是很接近, 卻不相等. 可見要剛好相等不容易, 只能求儘量接近. 詳見第四章.

‘0/0’—亦即相對比的極限概念

須知兩個趨近于零之數取比不是沒有意義之數, 它蘊藏著不少難以想像的事象, 它是初生的世界, 很多事情是相對的, 值得深入去探討. 詳見第五章.

‘ $\sum 0$ ’—在極‘小’的世界裡, 大家都很平等, 不分大小, 無分貴賤, 它們‘和’起來會變成什麼樣的世界?

無限個趨近于零之數相加你能想像會發生什麼情形嗎? 你知道什麼叫‘真積力久則入’、‘見微知著’等嗎? 詳見第六章.

等式 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - c)^k = f(x)$ 成立嗎? —實函數是實數的不同組合所組成, 比實數複雜多了. 能不能系統地表示它, 以方便探討它的各種性質, 這是不是有待解決的呢?

本來學數學是為能幫助解決實際問題而設—如解微分方程式, 不是純粹只為興趣而已. 微積分是為分析函數之各種性質提供了極限的工具, 目的也是在建立不同的函數供實用之需. 惟在數學上能提供的函數種類不多, 能利用冪級數做為一般初等函數的表示法以應需求也算是達成目標的方法之一, 儘管引進它不是很有效的工具. 冪級數實是多項式未定係數法的延伸.

數學是講求精確的學科嗎？

No, 在有限的數學裡, 亦即不談無窮近似的情況下, 數學是可以講求精確的, '摻與半粒沙子都不容許'. 但是世上的事情並非可由有限情況所能全概括, 是故數學爲了幫助了解實際事務, 只好也講求近似的概念, 而且須知的, 在近似的世界裡, 很多的過去適用的情況一樣會成立 (弱化所予條件不少). 往後更高水準的數學爲幫助解決更複雜的事務, 更非靠近似概念無以成事. 可見近似的概念急待建立——微積分可以說就是探討近似概念的初步數學.

1.8 練習題

1. a) 試證 $\sqrt{6}$ 是無理數.
b) 利用 a), 試證 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 爲無理數.
2. 設整數 p^2 爲 6 之倍數, 試證 p 本身也是 6 的倍數.
3. 設 A, B, C 爲任予三集合, 下列面命題成立嗎?
a) 若 $A \cup B = A \cup C$, 則 $B = C$. b) 若 $A \cap B = A \cap C$, 則 $B = C$.
c) 若 $A \cup B = A \cup C$, 其中 A 是對所有的集合, 則 $B = C$.
d) 若 $A \cap B = A \cap C$, 其中 A 是對所有的集合, 則 $B = C$.
4. 利用敘述的否定法, 寫出下列敘述之否定, 並判定其真假.
a) 每一等腰三角形必爲等邊三角形.
b) 每一自然數都小於或等於其平方.
c) 每一實數必大於其平方.
d) 有一圓, 其面積大於 9π
e) 有不是整數的實數存在.
f) 對每一實數 x , 有一實數 y 使函數 $f(x, y) = 0$.
g) 對任予正數 ε , 恆有正數 δ 使 x 滿足 $|x - a| < \delta$ 時, 恆使 $|f(x) - l| < \varepsilon$ 成立. 其中 l 是定數.
5. 寫出下列命題之逆及逆否命題, 並判定其真假.
a) (令 a, b, c 爲一三角形的三邊長), 若 $a^2 + b^2 = c^2$, 則此三角形爲直角三角形.
b) 設 a, b, c 爲三正數, 若 $a^2 + b^2 = c^2$, 則 a, b, c 爲某三角形的三邊長.
c) $\triangle ABC$ 中, 兩點 D, E 分別在邊 AB, AC 上, 若 DE 平行 BC , 則 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.
d) $\triangle ABC$ 中, 若 AD 爲 $\angle A$ 之分角線, 則 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$.

- e) 平行四邊形 ABCD 之四邊長平方和等於其對角線長之平方和。
6. 已知一直角三角形之面積為 25 平方公分, 試以所予三角形的周長 P 表示其斜邊長 h .
7. 試證: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, 其中 a, b, c 均為正實數, 且 a, c 不等於 1.
8. 試證兩整數 a, b 互質的充要條件為 $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ such that $ua + vb = 1$
註: 同理亦的知整數 u, v 互質.
9. 若 $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c \geq 0$ (成立), 試求係數 a, b, c 的範圍或條件.
10. 試求二次函數 $ax^2 + bx + c$ 恆正的充要條件.
11. 試證二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 有實根之充要條件為 $b^2 - 4ac \geq 0$.
12. 試證 $p + q + 1 < 0$ 為二次方程式 $x^2 + px + q = 0$ 有實根的充分條件.
13. 設 $f(x)$ 表三次以上的多項式, 若分別以 $(x - 1), (x - 2), (x - 3)$ 除 $f(x)$ 所得之餘式分別為 R_1, R_2, R_3 , 試證以 $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ 除 $f(x)$ 所得之餘式為

$$R_1 \frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)} + R_2 \frac{(x-3)(x-1)}{(2-3)(2-1)} + R_3 \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}.$$

14. (有理因式檢定法) 設整係數多項式 $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 = 0$ 有整因式 $px - q$ (p, q 互質), 試證 p 為 a_n 之因數且 q 為 a_0 之因數.
15. 試利用有理因式檢定法, 解方程式 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
16. 試利用綜合除法以 $(x - 2)$ 所對應的多項式表示多項式 $p(x) = 3x^5 + x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 5x + 4$.
17. 部分分式之‘分解’(把和化回原真分式之相加):

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 5x + 6}.$$

18. 試證: 三角函數之加法公式 (Additional Formula).

- a) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R};$
 b) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}$

19. 試證 $\sin \theta = \frac{2 \tan^2 \theta/2}{1 + \tan^2 \theta/2}, \cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \theta/2}{1 + \tan^2 \theta/2}.$

20. 試證: 下列三角函數之和差化積公式.

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{(x+y)}{2} \cos \frac{(x-y)}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{(x+y)}{2} \sin \frac{(x-y)}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{(x+y)}{2} \cos \frac{(x-y)}{2}$$

$$\sin x - \sin y = -2 \sin \frac{(x+y)}{2} \sin \frac{(x-y)}{2}$$

21. 試敘述並證明餘弦定律 (laws of cosine)—畢氏定理之延伸.

22. 試利用數學歸納法證明下列命題.

a) 二項式定理 (binomial theorem):

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x^1 + \cdots + \binom{n}{k}x^k + \cdots + x^n.$$

其中 n 為正整數.

b) 棣莫哇定理 (De Moivre's theorem):

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

其中 n 為整數, 而 $i = \sqrt{-1}$.

第一章習題解答

1. a) (仿照例2(p.11)反證法) 設 $\sqrt{6}$ 為有理數, 則令 $\sqrt{6} = p/q$, 其中 p, q 為互質之整數. 平方之得 $6q^2 = p^2$. 可見 $6|p$, 亦即 $p = 6m$ 其中 m 為適當整數. 此代回前式得 $6q^2 = 36m^2$, 約分後得 $q^2 = 6m^2$ 可見 $6|q$. p, q 有公因子6與所假設矛盾.

b) 同上, 設 $\sqrt{2} + \sqrt{3} = a \in \mathbb{Q}$. 則 $2 + 3 + 2\sqrt{6} = a^2$, 可見 $\sqrt{6}$ 為有理數, 由上題知矛盾.

2. 反證法: 若 p 不是6之倍數, 則顯然 p^2 也不會是有6之倍數.(因6本身不是平方數.)

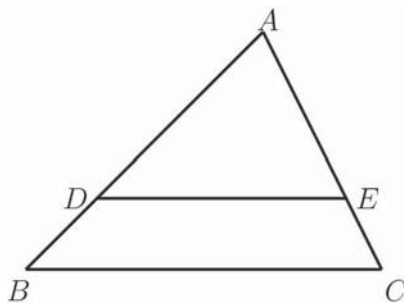
3. a) 不成立. 如 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 3\}, C = \{2\}$ 則顯然 $B \neq C$, 但 $A \cup B = A \cup C$.
 b) 不成立. 如 $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}, C = \{1\}$ 則顯然 $B \neq C$, 但 $A \cap B = A \cap C$.
 c) 成立. 如 $B \neq C$ 則當 $A = B \cap C$ 時, 因 $A \cup B = B, A \cup C = C$. 而後兩者由假設知須相等. 此與 $B \neq C$ 不合.
 d) 成立. 如 $B \neq C$ 則當 $A = B \cup C$ 時, 因 $A \cap B = B, A \cap C = C$. 而後兩者由假設知須相等. 此與 $B \neq C$ 不合.

4. a) 至少有一等腰 \triangle 不是等邊 \triangle (真.)
 b) 至少有一自然數大於其平方. (假)
 c) 有一實數不大於其平方. (真)
 d) 所有圓之面積均不大於 9π . (假)
 e) 所有的整數都不是實數. (假)
 f) $\sim (\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \ni f(x, y) = 0) \equiv (\exists x \in \mathbb{R} \ni \forall y \in \mathbb{R}, f(x, y) \neq 0)$ 其中 \ni 表‘使得’(such that.)
 g) $\sim (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni |x - a| < \delta, |f(x) - l| < \varepsilon) \equiv (\exists \varepsilon > 0 \ni \forall \delta > 0, |x - a| < \delta, |f(x) - l| \not< \varepsilon)$

5. a) (逆) 若此三角形為直角三角形, 則其三邊長 a, b, c 之間具 $a^2 + b^2 = c^2$. (真)
 (逆否) 若三角形不是直角三角形, 則其三邊長不具 $a^2 + b^2 = c^2$. (真)
 b) (逆) 若 a, b, c 為一三角形之三邊長, 則 $a^2 + b^2 = c^2$. (假)
 (逆否) 若 a, b, c 不為一三角形之三邊長, 則 $a^2 + b^2 \neq c^2$. (真)
 c) (逆) $\triangle ABC$ 中, D, E 分別為邊 AB, AC 上兩點. 若

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

, 則 DE 平行 BC . (真)



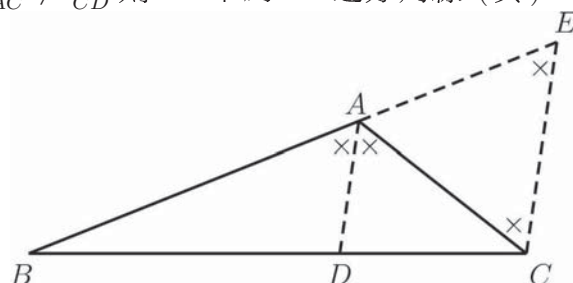
(逆否) $\triangle ABC$ 中, D, E 分別為邊 AB, AC 上兩點. 若

$$\frac{AD}{DB} \neq \frac{AE}{EC},$$

則 DE 不平行 BC (真)

d) (逆) $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ 則 AD 為 $\angle A$ 之分角線. (真)

(逆否) $\triangle ABC$ 中, 若 $\frac{AB}{AC} \neq \frac{BD}{CD}$ 則 AD 不為 $\angle A$ 之分角線. (真)



e) (逆) 若 $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$, 則四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形. (真)

(逆否) 若 $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \neq AC^2 + BD^2$, 則四邊形 $ABCD$ 不為平行四邊形. (真)

6. 令 h 為所予直角三角形的斜邊長, 而 a, b 為其兩腰. 則由所予假設得下列等式

$$h^2 = a^2 + b^2; 25 = \frac{1}{2}ab; P = a + b + h$$

從這些等式設法消去 a, b 可得 $h = \frac{P^2 - 100}{2P}$.

7. 令 $\log_a b = x$, 則由對數之定義知 $b = a^x$. 兩邊在取以 c 為底之對數即可得證欲證式.

8. (利用輾轉互除法可得) (a, b) 表 a, b 之最大公因數 $= (r_1 = a - bq, b) = (r_1, r_2 = b - r_1q_1) = \cdots = (r_{n-1}, r_n) = 1$ (互質), 其中 r_n 都是 a, b 之線性組合.

9. i) 當 $a \neq 0$ 時, 先配方: $ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$. 左式對所有 $x \in \mathbb{R}$ 恆 ≥ 0 時, 則非 $a > 0$ 且 $\frac{4ac - b^2}{4a} \geq 0$ 不可.

ii) 當 $a = 0$ 時, 所予式變為 $bx + c \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, 此時須非 $b = 0, c \geq 0$ 不可.

由上得所求的充要條件為 $a > 0, 4ac - b^2 \geq 0$ 且 $a = b = 0, c \geq 0$

10. 只因是二次, 故 $a \neq 0$. 餘同上題.

11. 配方得 $ax^2 + bx + c = a(x + b/2a)^2 + (4ac - b^2)/4a = 0$ 解得 $x = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}/2a$, 因須實根, 故根號內必不可為負. 得證.

12. 相當於證: 若 $p + q + 1 < 0$, 則 $x^2 + px + q = 0$ 有實根. 亦即證: $p + q + 1 > 0 \Rightarrow p^2 - 4q \geq 0$. 進行如下.

$p^2 - 4q > p^2 + 4(p + 1) = (p + 2)^2 \geq 0$ 得證.

13. 由除法定理得 $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)q(x) + R(x)$, 其中 $R(x)$ 為二次多項式, 不妨設為 $a(x - 2)(x - 3) + b(x - 3)(x - 1) + c(x - 1)(x - 2)$.

又由剩餘定理知: 當 $x = 1, 2, 3$ 代入上式時, 得 $R_1 = a, R_2 = b, R_3 = c$. 得證.

14. 由除法定理知 $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0 = (px - q)Q(x)$, 其中 $Q(x)$ 為商式. 兩邊之 x 以 q/p 代入得 $a_n(q/p)^n + \dots + a_0 = 0$ 亦即 $a_n q^n = -p(a_{n-1}q^{n-1} + \dots + a_0 p^{n-1})$ 因 p, q 互質. 故得 $p|a_n$; 同理. 由 $a_0 p^n = -q(a_n q^{n-1} + \dots + a_1 p^{n-1})$, 因 p, q 互質, 得 $q|a_0$. 證畢.

15. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$.

16. 直接用綜合除法進行可得 $3(x - 2^5) + 31(x - 2)^4 + 126(x - 2)^3 + 244(x - 2)^2 + 225(x - 2) + 82$. 亦可得自未定係數法.

17. (先化成帶分式再表成真分式之和)

$$\frac{x^3 + x^2}{x^2 + 5x + 6} = x - 4 + \frac{14x + 24}{x^2 + 5x + 6} = x - 4 - \frac{4}{x + 2} + \frac{18}{x + 3}.$$

18(餘弦定律) 參見 p.15 之附圖: 自 A 自對邊 BC 之高為 AD , 則由畢氏定理知

$$b^2 = h^2 + y^2 = c^2 - x^2 + y^2 = c^2 - x^2 + (a - x)^2 = c^2 + a^2 - 2ax = c^2 + a^2 - 2ca \cos \angle B$$

. 其他同理可得.

19. (加法定理) 在單位圓上取兩角其度量為 x, y , 則由餘弦定律得 $AB^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cos(x - y)$, 亦即 $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 2 - 2 \cos(x - y)$. 整理之得: $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$. 當 y 以 $-y$ 代入即得證加法定理. 其他同理可得.

$$20. \sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \cos^2(x/2)(2 \tan(x/2)) = \frac{2 \tan(x/2)}{\sec^2(x/2)} = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

$$\cos x = \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2) = \cos^2(x/2)(1 - \tan^2(x/2)) = \frac{1 - \tan^2(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

$$21. \sin x = \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\sin y = \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right) = \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

上兩等式各邊相加即得 $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$. 其他同理可得.

22.(歸納法)

a)略(另請參考p.229之二項定理推廣)

b)略(另請參考p.230之棣莫哇定理)

